

IL NUOVO CIMENTO

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

VOL. IX, N. 8

Serie nona

1 Agosto 1952

Sulle particelle penetranti negli sciami estesi dei raggi cosmici e la fase di sviluppo degli sciami.

C. MILONE

Istituto di Fisica dell'Università - Catania

(ricevuto il 22 Aprile 1952)

Riassunto. — Viene studiata al livello del mare la variazione del rapporto R fra il numero delle particelle penetranti ed il numero totale di particelle negli sciami estesi di raggi cosmici, al variare della densità media Δ degli sciami registrati. Si trova che R decresce leggermente al crescere di Δ . Confrontando questo risultato con i risultati di analoghe misure eseguite da altri autori a quote più elevate si deduce che il valore di R dipende dall'età dello sciame e cresce con essa.

1. — Introduzione.

Negli sciami estesi di raggi cosmici le particelle penetranti costituiscono qualche per cento del numero totale di particelle. Per il rapporto R fra il numero delle particelle penetranti ed il numero totale di particelle sono stati trovati al livello del mare valori intorno a $0,02 \div 0,03$ ⁽¹⁻⁷⁾. Nel corso di

(1) G. COCCONI, A. LOVERDO e V. TONGIORGI: *Phys. Rev.*, **60**, 852 (1946).

(2) B. BROADBENT e J. JÁNOSSY: *Proc. Roy. Soc., A*, **191**, 517 (1947); *A*, **192**, 364 (1948).

(3) S. CHAUDHURI: *Nature*, **161**, 680 (1948).

(4) G. COCCONI, V. COCCONI TONGIORGI e K. GREISEN: *Phys. Rev.*, **75**, 1063 (1949).

(5) C. MILONE, S. TAMBURINO e G. VILLARI: *Nuovo Cimento*, **7**, 207 (1950).

(6) C. MILONE: *Nuovo Cimento*, **8**, 643 (1951).

(7) C. B. A. MCCUSKER e D. D. MILLAR: *Proc. Phys. Soc., A*, **64**, 915 (1951).

un precedente lavoro ⁽⁸⁾, sono state eseguite al l.d.m. delle misure per determinare il valore di R in sciami con diversa densità media Δ . I risultati di queste misure, non riportati in ⁽⁸⁾ vengono qui esposti e confrontati con i risultati di analoghe misure eseguite da altri autori a quote più elevate.

2. - Dispositivo sperimentale e risultati.

Il dispositivo sperimentale era costituito da tre gruppi di contatori A , B , C , ciascuno di superficie totale S , disposti in un piano orizzontale ai vertici di un triangolo equilatero di 4 m di lato, separati dalla libera atmosfera da pochi g cm^{-2} di materiale leggero e destinati a rivelare gli sciami la cui parte centrale cade in prossimità del triangolo ABC . Un quarto gruppo di contatori P , di superficie S_P , schermato con 15 cm Pb + 1 cm Fe sopra, 7,5 cm Pb ai lati e 5 cm Fe sotto i contatori, posto nella parte centrale di ABC , era destinato a rivelare le particelle penetranti appartenenti a sciami rivelati da ABC . Mediante un circuito di coincidenze del tipo Rossi, con tempo di risoluzione di 25 μs , sono stati registrati gli eventi $A+B+C=T$ ed $A+B+C+P=T+P$.

Sono state eseguite diverse serie di misure dando ad S successivamente i valori $S = 0,024; 0,08; 0,16; 0,32 \text{ m}^2$, selezionando cioè sciami con diversa densità media $\Delta = 1/S \text{ m}^{-2}$.

I risultati delle misure sono riassunti nella tabella I. In essa sono riportati i valori di S e di S_P , i valori dell'esponente γ nello spettro di densità $F(\Delta) = K\Delta^{-\gamma}$ ⁽⁹⁾, la durata delle misure in minuti primi, i valori degli eventi T e $T+P$ corretti dagli eventi casuali ed i valori dei rapporti R dedotti dai rapporti $(T+P)/T$ col metodo seguito in ⁽⁸⁾. I valori relativi ad $S = 0,04$ si riferiscono ai risultati di un precedente lavoro ⁽⁶⁾, eseguito con un dispositivo sperimentale analogo a quello adoperato nel presente lavoro.

TABELLA I.

$S \text{ (m}^2\text{)}$	γ	$S_P \text{ (m}^2\text{)}$	Minuti	T	$T + P$	R
0,024	1,45	0,024	30 535	1 369	85	0,028 \pm 0,004
0,04	1,44	0,182	12 410	1 198	265	0,031 \pm 0,002
0,08	1,40	0,08	13 563	3 053	225	0,032 \pm 0,0025
0,16	1,37	0,16	19 235	12 189	945	0,0334 \pm 0,0014
0,32	1,35	0,20	11 000	28 236	1 002	0,0378 \pm 0,0017

⁽⁸⁾ C. MILONE: *Nuovo Cimento*, **9**, 549 (1952).

⁽⁹⁾ G. COCCONI, V. COCCONI TONGIORGI e K. GREISEN: *Phys. Rev.*, **75**, 1058 (1949).

Contemporaneamente agli eventi T e $T + P$ sono stati registrati gli eventi $T + D$ avendo indicato con D un gruppo di contatori non schermato con superficie $S_D = S$ posto in prossimità di ABC . Gli eventi $T + D$ permettevano un controllo del calcolo degli eventi casuali T , particolarmente utile nei

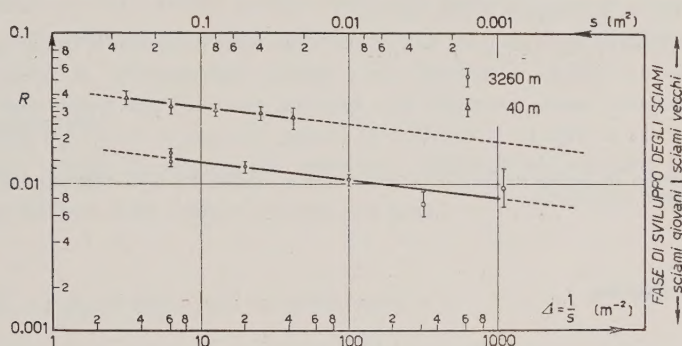


Fig. 1. - Valore del rapporto R fra il numero delle particelle penetranti ed il numero totale di particelle negli sciame, in funzione della densità media Δ dello sciame, a 3260 m s.l.d.m. (G. COCCONI, V. COCCONI TONGIORGI e K. GREISEN) ed a 40 m s.l.d.m. (presente lavoro).

casi $S = 0,32$ ed $S = 0,16$, nei quali casi la percentuale di eventi casuali T era elevata ⁽¹⁰⁾.

Nella fig. 1 sono riportati in scala logaritmica i valori di R in funzione dei valori di $\Delta = 1/S$. La figura mostra che i valori di R decrescono leggermente al crescere di Δ .

3. - Confronto con precedenti lavori.

Nella stessa fig. 1 sono riportati i risultati delle misure eseguite da G. COCCONI, V. COCCONI TONGIORGI e K. GREISEN (nel seguito indicate con C.T.G.) alla quota di 3260 m s.l.d.m. ⁽⁴⁾. Anche in queste misure i valori di R decrescono al crescere di Δ . La variazione di R al variare di Δ dipende poco dalla quota; infatti i valori di R possono essere espressi nelle nostre misure con la relazione.

$$(1) \quad R = K_1 \Delta^{-0,11}$$

⁽¹⁰⁾ In questi casi la frequenza degli eventi T veniva dedotta dagli eventi $T + D$, in cui gli eventi casuali erano qualche percento.

e nelle misure di C.T.G. con la relazione

$$(2) \quad R = K_2 \Delta^{-0,13}.$$

Più elevate sono fra le due quote le differenze fra i coefficienti K : si ha $K_1 = 0,042$ e $K_2 = 0,018$ (Δ in m^{-2}).

Il dispositivo sperimentale adoperato nelle nostre misure è simile a quello adoperato da C.T.G.; i risultati sono quindi confrontabili. Ai nostri valori di R dovrebbe essere sottratto solo qualche per cento per tener conto della differenza fra le misure di C.T.G. e le nostre, di circa 2 cm di Pb nello spessore dello schermo che sovrasta i contatori del gruppo P . Questa correzione non è stata apportata.

4. - Discussione.

Osserviamo che se si ammette che le relazioni (1) e (2) siano valide in un campo di variabilità di Δ molto più esteso di quello a cui si riferiscono i risultati sperimentali, si può dedurre che i valori di R relativi alla quota di 3260 m risulterebbero eguali a quelli che si ottengono al livello del mare se a 3260 m si prendessero in considerazioni sciami con densità media circa 2000 volte minore che al l.d.m. (fig. 1).

Osserviamo inoltre che selezionando a due quote differenti sciami con la stessa densità media, si selezionano sciami che si trovano in fasi notevolmente diverse del loro sviluppo: uno sciame che al l.d.m. ha densità media eguale a quella di uno sciame a 3260 m deve essere stato originato da un primario molto più energico ed è molto più vecchio di uno sciame che abbia la stessa densità a 3260 m.

Osserviamo infine che secondo la teoria a cascata uno sciame a 3260 m ed uno sciame al l.d.m. si possono considerare nella stessa fase di sviluppo se lo sciame registrato a 3260 m ha densità di particelle qualche migliaio di volte più piccola della densità dello sciame registrato al l.d.m.

Dalle precedenti osservazioni si può trarre la seguente correlazione fra i valori di R e l'età dello sciame: R cresce con l'età dello sciame. Si possono ottenere a quote differenti gli stessi valori di R se si selezionano sciami non della stessa densità ma della stessa età.

Ad una determinata quota i valori di R crescono col decrescere di Δ in quanto col decrescere di Δ vengono selezionati sciami originati da primari meno energici e quindi più vecchi.

Se lo sciame è molto vecchio i valori di R possono essere molto alti. La elevata percentuale di particelle penetranti, apparentemente non appartenenti a sciami, presente nella radiazione cosmica totale al l.d.m. può considerarsi

appartenente a sciami ⁽¹¹⁾ molto vecchi, per i quali risulta $R \gg 1$. Questi «sciami» derivano da primari con bassa energia, sono molto frequenti, ma hanno densità di particelle molto bassa. Gli sciami estesi che normalmente si registrano derivano invece da primari più energici.

Qualitativamente quanto è stato detto vale anche se, come è probabile ⁽⁸⁾, prende parte allo sviluppo dello sciame una componente nucleonica.

5. - Conclusioni.

La percentuale R di particelle penetranti negli sciami estesi di raggi cosmici dipende dall'età dello sciame e cresce con essa.

⁽¹¹⁾ G. COCCONI: *Phys. Rev.*, **78**, 1006 (1950).

SUMMARY

The ratio R of penetrating particles in extensive cosmic-ray showers has been determined at the sea level as a function of the mean density A of the showers. It is found that R decreases slowly as A increases. Comparing this result with the results of measurements performed by other authors at 3260 m a.s.l., it is deduced that the value of R depends on the stage of the development of the showers and increases as this stage increases.

The Non-Adiabatic Method with a Neutral Pseudo-Scalar Meson Field.

D. BARONCINI (*)

Institut for teoretisk Fysik - København, Danmark

(ricevuto il 10 Maggio 1952)

Summary. — Dancoff's non-adiabatic procedure for the two-nucleon system interacting with a meson field is applied to the neutral pseudo-scalar meson field, taking into account both types of couplings, the pseudo-scalar and the pseudo-vector. The procedure is limited to the 2nd order of the coupling constants. Using the Hamiltonian containing the direct-interaction term, the Schrödinger equation of motion contains interaction potentials, one of which introduces into the equation a high singularity. The reason is that the term arising from the direct-interaction Hamiltonian does not cancel completely with the so-called contact-term, which arises from the nucleon-meson interaction Hamiltonian, as it is the case in the adiabatic procedure. If the direct-interaction Hamiltonian is neglected from the beginning, the Schrödinger equation contains a singular potential, which corresponds to the contact-term of the adiabatic approximation. This potential behaves, however, as the corresponding potential in the previous case, and not as a δ -function, as is the case in the adiabatic procedure. The remaining interaction potentials, which are the same in the two cases, are less singular than the potentials in the adiabatic procedure. In the non-relativistic limit, the interaction functions lead to the same functions given by the conventional perturbation procedure.

Introduction.

Dancoff's non-adiabatic meson theory for the two-nucleon system is applied to the neutral pseudo-scalar meson field, taking into account both types of couplings, the pseudo-scalar and the pseudo-vector.

It has been shown by VAN HOVE that from the complete Lagrangian containing both couplings, the derived Hamiltonian contains a direct-interaction term, which cancels, in a second-order evaluation, the so-called contact-term;

(*) On leave of absence from the Istituto di Fisica «A. Righi», Bologna.

this contact-term is obtained from that part of the interaction Hamiltonian which contains the interacting nucleons and meson fields. Van Hove's procedure is essentially an adiabatic procedure, in which the interaction between the nucleons is evaluated independently of the equation of the motion; the motion of the two-nucleon system is worked out in a second step, by introducing the interaction into the wave equation for the system (LEVY). The purpose of the present paper is the investigation of the interaction between two nucleons and pseudo-scalar meson field by means of the non-adiabatic procedure. It is well known that the non-adiabatic procedure for the two-nucleons forces consists in a technique in which no assumption is made on the ground state of the system: a superposition of all the states in which the system can be found is taken as wave function of the system and the motion of the system is worked out relativistically. In the present paper the formalism is limited to a superposition of states in which no more than one meson can be present, and the negative-energy states are supposed to be filled. No states with nucleon pairs are taken into account.

The procedure is applied to the complete Hamiltonian containing the direct-interaction term, and to the Hamiltonian in which the direct-interaction term is neglected; in both cases one obtains results which, in the non-relativistic limit, are in agreement with the results of the so-called adiabatic procedure.

1. — General equations.

The Lagrangian function for the system of two nucleons interacting through a pseudo-scalar meson field is the sum of three independent terms, for the free nucleons and mesons respectively, and a coupling term in which two types of couplings, the pseudo-scalar and the pseudo-vector, will be considered. It will be written as:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad L = & -\frac{1}{2i} \int d_3x \left\{ \psi_P^* (\boldsymbol{\alpha} \cdot \text{grad } \psi_P) - (\text{grad } \psi_P^* \cdot \boldsymbol{\alpha}) \psi_P + \psi_P^* \frac{\partial \psi_P}{\partial t} - \frac{\partial \psi_P^*}{\partial t} \psi_P + 2iM \psi_P^* \beta \psi_P \right\} - \\
 & -\frac{1}{2i} \int d_3x \left\{ \psi_N^* (\boldsymbol{\alpha} \cdot \text{grad } \psi_N) - (\text{grad } \psi_N^* \cdot \boldsymbol{\alpha}) \psi_N + \psi_N^* \frac{\partial \psi_N}{\partial t} - \frac{\partial \psi_N^*}{\partial t} \psi_N + 2iM \psi_N^* \beta \psi_N \right\} - \\
 & -\frac{1}{2} \int d_3x \left\{ (\text{grad } U \cdot \text{grad } U) - \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \mu^2 U^2 \right\} - \\
 & - \int d_3x \left\{ \psi_P^* \left[f_1 \varrho_2 U + \frac{f_2}{\mu} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \text{grad } U) + \frac{f_2}{\mu} \varrho_1 U \right] \psi_P + \right. \\
 & \left. + \psi_N^* \left[f_1 \varrho_2 U + \frac{f_2}{\mu} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \text{grad } U) + \frac{f_2}{\mu} \varrho_1 U \right] \psi_N \right\}.
 \end{aligned}$$

Here, the ψ_P, ψ_N are the spinor wave functions for the two nucleons (labelled with P, N) which obey the Dirac equation; M is the nucleon mass; the pseudo-scalar U is the wave function for the meson field, μ is the meson mass, f_1 and f_2 are the pseudo-scalar and the pseudo-vector coupling constants, respectively. The $\alpha = \varrho_1 \sigma$, $\beta = \varrho_3$, $\varrho_2 = i\varrho_1 \varrho_3$ are the Dirac matrices operating on the nucleon wave function. The natural units were chosen to be $\hbar = c = 1$; f_1 and f_3 are dimensionless constants.

The derived Hamiltonian is

$$(2) \quad H = H_{f,n} + H_{f,m} + H_1 + H_2,$$

where

$$\begin{aligned} H_{f,n} &= \frac{1}{2i} \int d_3x \left\{ \psi_P^* (\alpha \cdot \text{grad } \psi_P) - (\text{grad } \psi_P^* \cdot \alpha) \psi_P + 2iM \psi_P^* \beta \psi_P + \right. \\ &\quad \left. + \psi_N^* (\alpha \cdot \text{grad } \psi_N) - (\text{grad } \psi_N^* \cdot \alpha) \psi_N + 2iM \psi_N^* \beta \psi_N \right\}, \\ H_{f,m} &= \frac{1}{2} \int d_3x \{ \Pi^2 + (\text{grad } U \cdot \text{grad } U) + \mu^2 U^2 \}, \\ H_1 &= \int d_3x \left\{ \psi_P^* \left[f_1 \varrho_2 U + \frac{f_2}{\mu} (\sigma \cdot \nabla U) + \frac{f_2}{\mu} \varrho_1 \Pi \right] \psi_P + \right. \\ &\quad \left. + \psi_N^* \left[f_1 \varrho_2 U + \frac{f_2}{\mu} (\sigma \cdot \nabla U) + \frac{f_2}{\mu} \varrho_1 \Pi \right] \psi_N \right\}, \\ H_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{f_2}{\mu} \right)^2 \int d_3x (\psi_P^* \varrho_2 \psi_P + \psi_N^* \varrho_1 \psi_N)^2. \end{aligned}$$

$H_{f,n}$ and $H_{f,m}$ are the Hamiltonians for the free nucleons and for the free mesons, respectively; H_1 is the interaction Hamiltonian between the two nucleons and the meson field and H_2 is the direct-interaction Hamiltonian for the nucleons.

In the momentum representation the operator for the meson field is

$$(3) \quad U = \sum_k (2\omega_k)^{-1/2} \{ A_k \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})] + A_k^* \exp [-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})] \},$$

where A_k, A_k^* are the annihilation and creation operators for the meson field, respectively; \mathbf{k} is the momentum of the meson and $\omega_k = (k^2 + \mu^2)^{1/2}$ is the energy of a meson with momentum \mathbf{k} , in natural units.

The nucleon operator expanded in plane waves is

$$(4) \quad \psi = \sum_{P,\sigma} a_{P,\sigma} u_{P,\sigma} \exp [i(\mathbf{P} \cdot \mathbf{x})],$$

where \mathbf{P} denotes the momentum and $\sigma = 1, 2, 3, 4$ is the index corresponding to the 4 spin-energy states for a nucleon with momentum \mathbf{P} . The spinor $u_{P,\sigma}$ obeys the Dirac equation

$$(\varrho_1 (\sigma \cdot \mathbf{P}) + \varrho_3 M) u_{P,\sigma} = E_{P,\sigma} u_{P,\sigma},$$

where the energy E_P is defined to be $E_P^2 = P^2 + M^2$. $a_{P,\sigma}$, $a_{P,\sigma}^*$ are the annihilation and creation operators for the nucleon in the state \mathbf{P} , σ , respectively. One may point out that $u_{P,\sigma}$ is one of the 4 solutions of the Dirac equation

$$(\varrho_1(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P}) + \varrho_3 M)u_P = E_P u_P,$$

and that it is possible to express the set of the 4 spinors $u_{P,\sigma}$ as a matrix, which can be written as:

$$(5) \quad u_P = \frac{1}{D_P} [\varrho_1(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P}) + \varrho_3 M + E_P].$$

Each of the 4 columns represents one of the 4 spinors $u_{P,\sigma}$. If in particular E_P is represented as

$$E_P = |E_P| \varrho_3, \quad \text{with} \quad \varrho_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

the matrix (5) can be written as

$$(6) \quad u_P = \frac{1}{D_P} \left[\varrho_1 \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P})}{M + |E_P|} + \varrho_3 \right],$$

and one has

$$D_P^2 = 2 |E_P| (M + |E_P|).$$

In this representation, which will be used in the following, the 2 spinors belonging to the positive-energy states appear in the columns 1, 2 and the 2 spinors belonging to the negative-energy states appear in the columns 3, 4.

2. - Application of the method.

According to DANCOFF, let

$$(7) \quad \Psi = \sum_{\mathbf{P}, \mathbf{N}, i, j} a_{\mathbf{P}\mathbf{N}}^{ij} |\mathbf{P}^i \mathbf{N}^j\rangle + \sum_{\mathbf{P}, \mathbf{N}, \mathbf{k}, i, j} b_{\mathbf{P}\mathbf{N}\mathbf{k}}^{ij} |\mathbf{P}^i \mathbf{N}^j \mathbf{k}\rangle,$$

be the wave function for the composite system of the 2 nucleons interacting with the meson field; the bracket $|\mathbf{P}^i \mathbf{N}^j\rangle$ is the function representing the presence of a proton having momentum \mathbf{P} and spin state i , and a neutron having momentum \mathbf{N} and spin state j . The second bracket represents a state in which in addition a meson of momentum \mathbf{k} is present. The coefficients $a_{\mathbf{P}\mathbf{N}}^{ij}$, $b_{\mathbf{P}\mathbf{N}\mathbf{k}}^{ij}$, have the well-known meaning of probability amplitudes. The relation

$$\sum_{\mathbf{P}\mathbf{N}\mathbf{k}ij} \{ |a_{\mathbf{P}\mathbf{N}}^{ij}|^2 + |b_{\mathbf{P}\mathbf{N}\mathbf{k}}^{ij}|^2 \} = 1,$$

follows from the assumption that only one meson shall be present. Let E be the energy of the system, inclusive of the binding energy. The Schrödinger

equation for the system is

$$(8) \quad H\Psi = E\Psi.$$

Inserting into this equation the expression for Ψ , (7), one gets

$$(9) \quad \sum_{\mathbf{P}\mathbf{N}^{ij}} H a_{\mathbf{P}\mathbf{N}}^{ij} |\mathbf{P}^i \mathbf{N}^j\rangle + \sum_{\mathbf{P}\mathbf{N}\mathbf{K}^{ij}} H b_{\mathbf{P}\mathbf{N}\mathbf{K}}^{ij} |\mathbf{P}^i \mathbf{N}^j \mathbf{K}\rangle = E \sum_{\mathbf{P}\mathbf{N}\mathbf{K}^{ij}} \{ a_{\mathbf{P}\mathbf{N}}^{ij} |\mathbf{P}^i \mathbf{N}^j\rangle + b_{\mathbf{P}\mathbf{N}\mathbf{K}}^{ij} |\mathbf{P}^i \mathbf{N}^j \mathbf{K}\rangle \}.$$

By taking products with appropriate wave functions and using the orthogonality of the various states, one obtains the pair of equations

$$(10) \quad a_{\mathbf{P}\mathbf{N}}^{rs}(E - E_{\mathbf{P}^r} - E_{\mathbf{N}^s}) = \sum_{\mathbf{P}_1 \mathbf{N}_1 \mathbf{K}^{ij}} b_{\mathbf{P}_1 \mathbf{N}_1 \mathbf{K}}^{ij} \langle \mathbf{P}^r \mathbf{N}^s | H_1 | \mathbf{P}_1^i \mathbf{N}_1^j \mathbf{K} \rangle + \\ + \sum_{\mathbf{P}_1 \mathbf{N}_1^{ij}} a_{\mathbf{P}_1 \mathbf{N}_1}^{ij} \langle \mathbf{P}^r \mathbf{N}^s | H_2 | \mathbf{P}_1^i \mathbf{N}_1^j \rangle,$$

$$(10') \quad b_{\mathbf{P}_1 \mathbf{N}_1 \mathbf{K}}^{ij}(E - E_{\mathbf{P}_1^i} - E_{\mathbf{N}_1^j} - \omega_k) = \\ = \sum_{\mathbf{P}_2 \mathbf{N}_2 \alpha \beta} a_{\mathbf{P}_2 \mathbf{N}_2}^{\alpha \beta} \langle \mathbf{P}_1^i \mathbf{N}_1^j \mathbf{K} | H_1 | \mathbf{P}_2^{\alpha} \mathbf{N}_2^{\beta} \rangle + \sum_{\mathbf{P}_2 \mathbf{N}_2 \alpha \beta} b_{\mathbf{P}_2 \mathbf{N}_2}^{\alpha \beta} \langle \mathbf{P}_1^i \mathbf{N}_1^j | H_2 | \mathbf{P}_2^{\alpha} \mathbf{N}_2^{\beta} \rangle,$$

which are coupled integral equations for the coefficients $a_{\mathbf{P}\mathbf{N}}^{rs}$ and $b_{\mathbf{P}\mathbf{N}\mathbf{K}}^{ij}$. The sums

$$\sum_{\mathbf{P}_1 \mathbf{N}_1^{ij}} a_{\mathbf{P}_1 \mathbf{N}_1}^{ij} \langle \mathbf{P}^r \mathbf{N}^s | H_2 | \mathbf{P}_1^i \mathbf{N}_1^j \rangle, \quad \sum_{\mathbf{P}_2 \mathbf{N}_2 \alpha \beta} b_{\mathbf{P}_2 \mathbf{N}_2}^{\alpha \beta} \langle \mathbf{P}_1^i \mathbf{N}_1^j | H_2 | \mathbf{P}_2^{\alpha} \mathbf{N}_2^{\beta} \rangle$$

contain diagonal terms such as

$$\langle \mathbf{P}^r \mathbf{N}^s | H_2 | \mathbf{P}^r \mathbf{N}^s \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{f_2^2}{\mu} \right)^2 \{ S_{\mathbf{P}\mathbf{N}}^{rs} + 2 \langle \mathbf{P}^r | \varrho_1^P | \mathbf{P}^r \rangle \langle \mathbf{N}^s | \varrho_1^N | \mathbf{N}^s \rangle \},$$

where

$$S_{\mathbf{P}\mathbf{N}}^{rs} = \sum_i \int d^3 \mathbf{h} \{ \langle \mathbf{P}^r | \varrho_1^P | \mathbf{P} - \mathbf{h}^i \rangle \langle \mathbf{P} - \mathbf{h}^i | \varrho_1^P | \mathbf{P}^r \rangle + \\ + \langle \mathbf{N}^s | \varrho_1^N | \mathbf{N} - \mathbf{h}^i \rangle \langle \mathbf{N} - \mathbf{h}^i | \varrho_1^N | \mathbf{N}^s \rangle \}$$

is infinite. It belongs to the self-energy of the nucleons and therefore it will be eliminated. The integral equations (10) and (10') contain now only finite kernels.

In order to obtain an equation for the a 's, it is necessary to solve the equation (10'). Putting

$$\sum_{\mathbf{P}_2 \mathbf{N}_2 \alpha \beta} a_{\mathbf{P}_2 \mathbf{N}_2}^{\alpha \beta} \frac{\langle \mathbf{P}_1^i \mathbf{N}_1^j \mathbf{K} | H_1 | \mathbf{P}_2^{\alpha} \mathbf{N}_2^{\beta} \rangle}{E - E_{\mathbf{P}_1^i} - E_{\mathbf{N}_1^j} - \omega_k} = F_{\mathbf{K}}^{ij}(\mathbf{P}_1, \mathbf{N}_1),$$

$$\frac{\mu^2}{f_2^2} \frac{\langle \mathbf{P}_1^i \mathbf{N}_1^j | H_2 | \mathbf{P}_2^{\alpha} \mathbf{N}_2^{\beta} \rangle}{E - E_{\mathbf{P}_1^i} - E_{\mathbf{N}_1^j} - \omega_k} = K_{\mathbf{K}}^{ij\alpha\beta}(\mathbf{P}_1, \mathbf{N}_1; \mathbf{P}_2, \mathbf{N}_2),$$

equation (10') becomes

$$(11) \quad b_{\mathbf{P}_1 \mathbf{N}_1 \mathbf{K}}^{ij} = F_{\mathbf{K}}^{ij}(\mathbf{P}_1, \mathbf{N}_1) + \frac{f_2^2}{\mu^2} \sum_{\alpha \beta} \int d^3 \mathbf{P}_2 d^3 \mathbf{N}_2 K_{\mathbf{K}}^{ij\alpha\beta}(\mathbf{P}_1, \mathbf{N}_1; \mathbf{P}_2, \mathbf{N}_2) b_{\mathbf{P}_2 \mathbf{N}_2 \mathbf{K}}^{\alpha \beta}.$$

The solution can be obtained by successive approximations; in the first two approximations the solutions are:

$$(I) \quad b_{\mathbf{P}_1 \mathbf{N}_1 \mathbf{k}}^{ij} = F_{\mathbf{k}}^{ij}(\mathbf{P}_1, \mathbf{N}_1),$$

$$(II) \quad b_{\mathbf{P}_1 \mathbf{N}_1 \mathbf{k}}^{ij} = F_{\mathbf{k}}^{ij}(\mathbf{P}_1, \mathbf{N}_1) + \frac{f_2^2}{\mu^2} \sum_{\alpha\beta} \int d^3\mathbf{P}_2 d^3\mathbf{N}_2 K_{\mathbf{k}}^{ij\alpha\beta}(\mathbf{P}_1 \mathbf{N}_1; \mathbf{P}_2 \mathbf{N}_2) F_{\mathbf{k}}^{\alpha\beta}(\mathbf{P}_2 \mathbf{N}_2).$$

One may note that (I) is exactly what would be left from (10') if the term

$$\sum_{\mathbf{P}_2 \mathbf{N}_2 \alpha\beta} b_{\mathbf{P}_2 \mathbf{N}_2}^{\alpha\beta} \langle \mathbf{P}_1^i \mathbf{N}_1^j | H_2 | \mathbf{P}_2^a \mathbf{N}_2^b \rangle,$$

were not taken into account. This solution limits the procedure to the second order of the coupling constants. Although no previous assumption has been made on the order of magnitude of the coupling constants, it seems to be convenient to limit the procedure to the second order of the coupling constants only, as long as one deals with a wave function as (7). In fact, by use of a wave function containing states with more than one quantum, one would obtain equations in which the consideration of higher terms in the coupling constants would be necessary. Therefore, in a first attempt, it seems to be convenient to limit the formalism to solution (I). By use of (I) and inserting (10') into (10), one obtains

$$(12) \quad a_{\mathbf{P}\mathbf{N}}^{rs}(E - E_{Pr} - E_{Ns}) = \sum_{\mathbf{P}_1 \mathbf{N}_1^{ij}} a_{\mathbf{P}_1 \mathbf{N}_1}^{ij} \langle \mathbf{P}^r \mathbf{N}^s | H_2 | \mathbf{P}_1^i \mathbf{N}_1^j \rangle + \\ + \sum_{\mathbf{P}_1 \mathbf{N}_1 \mathbf{k} ij} \sum_{\mathbf{P}_2 \mathbf{N}_2 \alpha\beta} \frac{\langle \mathbf{P}^r \mathbf{N}^s | H_1 | \mathbf{P}_1^i \mathbf{N}_1^j \mathbf{k} \rangle \langle \mathbf{P}_1^i \mathbf{N}_1^j \mathbf{k} | H_1 | \mathbf{P}_2^a \mathbf{N}_2^b \rangle}{E - E_{P_1 i} - E_{N_1 j} - \omega_k} a_{\mathbf{P}_2 \mathbf{N}_2}^{\alpha\beta},$$

which is an integral equation for the coefficients a .

One may point out that by neglecting the direct-interaction term H_2 in H , one gets a pair of coupled equations, obtained from the same wave function (7), such as

$$(13) \quad a_{\mathbf{P}\mathbf{N}}^{rs}(E - E_{Pr} - E_{Ns}) = \sum_{\mathbf{P}_1 \mathbf{N}_1 \mathbf{k} ij} b_{\mathbf{P}_1 \mathbf{N}_1 \mathbf{k}}^{ij} \langle \mathbf{P}^r \mathbf{N}^s | H_1 | \mathbf{P}_1^i \mathbf{N}_1^j \mathbf{k} \rangle,$$

$$(13') \quad b_{\mathbf{P}_1 \mathbf{N}_1 \mathbf{k}}^{ij}(E - E_{P_1 i} - E_{N_1 j} - \omega_k) = \sum_{\mathbf{P}_2 \mathbf{N}_2 \alpha\beta} a_{\mathbf{P}_2 \mathbf{N}_2}^{\alpha\beta} \langle \mathbf{P}_1^i \mathbf{N}_1^j \mathbf{k} | H_1 | \mathbf{P}_2^a \mathbf{N}_2^b \rangle.$$

Here there is no need of approximate solutions, and the elimination of the b 's leads directly to an equation in the square of the coupling constants:

$$(12') \quad a_{\mathbf{P}\mathbf{N}}^{rs}(E - E_{Pr} - E_{Ns}) = \\ = \sum_{\mathbf{P}_1 \mathbf{N}_1 \mathbf{k} ij} \sum_{\mathbf{P}_2 \mathbf{N}_2 \alpha\beta} \frac{\langle \mathbf{P}^r \mathbf{N}^s | H_1 | \mathbf{P}_1^i \mathbf{N}_1^j \mathbf{k} \rangle \langle \mathbf{P}_1^i \mathbf{N}_1^j \mathbf{k} | H_1 | \mathbf{P}_2^a \mathbf{N}_2^b \rangle}{E - E_{P_1 i} - E_{N_1 j} - \omega_k} a_{\mathbf{P}_2 \mathbf{N}_2}^{\alpha\beta}.$$

Matrix-elements of H_1 , as they appear in (12), (12'), are

$$(14) \quad \langle \mathbf{P}^r \mathbf{N}^s | H_1 | \mathbf{P}_1^i \mathbf{N}_1^j \mathbf{k} \rangle = \\ = \frac{1}{(2\omega_k)^{1/2}} \left\{ u_{P,r}^* \left[f_1 \varrho_2 + i \frac{f_2}{\mu} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}) - i \frac{f_2}{\mu} \omega_k \varrho_1 \right] u_{P_1,i} + \right. \\ \left. + u_{N,s}^* \left[f_1 \varrho_2 + i \frac{f_2}{\mu} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}) - i \frac{f_2}{\mu} \omega_k \varrho_1 \right] u_{N_1,j} \right\},$$

which describes the absorption of a meson with momentum \mathbf{k} and energy ω_k , and where from momentum conservation $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{k}$, $\mathbf{N} = \mathbf{N}_1 + \mathbf{k}$. Similarly

$$(14') \quad \langle \mathbf{P}_1^i \mathbf{N}_1^j | H_1 | \mathbf{P}_2^a \mathbf{N}_2^b \rangle = \\ = \frac{1}{(2\omega_k)^{1/2}} \left\{ u_{P_1,i}^* \left[f_1 \varrho_2 - i \frac{f_2}{\mu} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}) + i \frac{f_2}{\mu} \omega_k \varrho_1 \right] u_{P_2,a} + \right. \\ \left. + u_{N_1,j}^* \left[f_1 \varrho_2 - i \frac{f_2}{\mu} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}) + i \frac{f_2}{\mu} \omega_k \varrho_1 \right] u_{N_2,b} \right\},$$

describes the emission of a meson with momentum \mathbf{k} and energy ω_k ; from momentum conservation here $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2 + \mathbf{k}$, $\mathbf{N}_2 = \mathbf{N}_1 + \mathbf{k}$. By use of the equations

$$u_{P-k}^* [\varrho_1 (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P} - \mathbf{k}) + \varrho_3 M] = u_{P-k}^* E_{P-k}, \quad [\varrho_1 (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P}) + \varrho_3 M] u_P = E_P u_P,$$

one may write:

$$i \frac{f_2}{\mu} u_{P-k}^* [(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}) - \omega_k \varrho_1] u_P = i \frac{f_2}{\mu} u_{P-k}^* [(E_P - E_{P-k} - \omega_k) \varrho_1 + 2iM \varrho_2] u_P.$$

Here, on account of (5), any product of the type

$$u_{P_1,i}^* \varrho_1 u_{P_2,\alpha} \quad \text{or} \quad u_{P_1,i}^* \varrho_2 u_{P_2,\alpha},$$

may be understood as the i, α -th matrix-element of the matrix

$$u_{P_1}^* \varrho_1 u_{P_2} \quad \text{or} \quad u_{P_1}^* \varrho_2 u_{P_2}$$

respectively. These matrices can be evaluated explicitly by use of (5); their matrix-elements, indicated as follows,

$$u_{P_1,i}^* \varrho_2 u_{P_2,\alpha} = \langle \mathbf{P}_1^i | \varrho_2^P | \mathbf{P}_2^a \rangle,$$

describes a transition of the particle from the state specified on the right to the state specified on the left.

With these notations and setting $f_3 = f_1 + 2Mf_2/\mu$, matrix-elements of H_1 ,

as they appear in (12), (12') can be written again to be:

$$(15) \quad \langle \mathbf{P}_1^i \mathbf{N}_1^i \mathbf{k} | H_1 | \mathbf{P}_2^a \mathbf{N}_2^{\beta} \rangle = \\ = \frac{1}{(2\omega_k)^{1/2}} \left\{ f_3 \langle \mathbf{P}_1^i | \varrho_2^P | \mathbf{P}_2^a \rangle - i \frac{f_2}{\mu} \langle \mathbf{P}_1^i | \varrho_1^P | \mathbf{P}_2^a \rangle (E_{P_2^a} - E_{P_1^i} - \omega_k) + \right. \\ \left. + f_3 \langle \mathbf{N}_1^j | \varrho_2^N | \mathbf{N}_2^{\beta} \rangle - i \frac{f_2}{\mu} \langle \mathbf{N}_1^j | \varrho_1^N | \mathbf{N}_2^{\beta} \rangle (E_{N_2^{\beta}} - E_{N_1^j} - \omega_k) \right\},$$

$$(15') \quad \langle \mathbf{P}^r \mathbf{N}^s | H_1 | \mathbf{P}_1^i \mathbf{N}_1^j \mathbf{k} \rangle = \\ = \frac{1}{(2\omega_k)^{1/2}} \left\{ f_3 \langle \mathbf{P}^r | \varrho_2^P | \mathbf{P}_1^i \rangle + i \frac{f_2}{\mu} \langle \mathbf{P}^r | \varrho_1^P | \mathbf{P}_1^i \rangle (E_{P^r} - E_{P_1^i} - \omega_k) + \right. \\ \left. + f_3 \langle \mathbf{N}^s | \varrho_2^N | \mathbf{N}_1^j \rangle + i \frac{f_2}{\mu} \langle \mathbf{N}^s | \varrho_1^N | \mathbf{N}_1^j \rangle (E_{N^s} - E_{N_1^j} - \omega_k) \right\}.$$

From the product of these matrix-elements, as it appears in (12), (12'), the terms describing the emission and the reabsorption of a meson by the same nucleon are omitted, since they belong to the self-energy of the nucleons. One has to deal therefore only with the terms which describe the exchange of a meson between the 2 nucleons. On account of momentum conservation, one has

$$(16) \quad a_{P_2 N_2}^{\alpha\beta} \langle \mathbf{P}^r \mathbf{N}^s | H_1 | \mathbf{P}_1^i \mathbf{N}_1^j \mathbf{k} \rangle \langle \mathbf{P}_1^i \mathbf{N}_1^j \mathbf{k} | H_1 | \mathbf{P}_2^a \mathbf{N}_2^{\beta} \rangle = \\ = \frac{a_{P-k, N+k}^{i\beta}}{2\omega_k} \left\langle \mathbf{P}^r \left| f_3 \varrho_2^P + i \frac{f_2}{\mu} (E_{P^r} - E_{P-k, i} - \omega_k) \varrho_1^P \right| \mathbf{P} - \mathbf{k}^i \right\rangle \times \\ \times \left\langle \mathbf{N}^s \left| f_3 \varrho_2^N - i \frac{f_2}{\mu} (E_{N+k, \beta} - E_{N^s} - \omega_k) \varrho_1^N \right| \mathbf{N} + \mathbf{k}^{\beta} \right\rangle + \\ + \frac{a_{P+k, N-k}^{ja}}{2\omega_k} \left\langle \mathbf{N}^s \left| f_3 \varrho_2^N + i \frac{f_2}{\mu} (E_{N^s} - E_{N-k, j} - \omega_k) \varrho_1^N \right| \mathbf{N} - \mathbf{k}^j \right\rangle \times \\ \times \left\langle \mathbf{P}^r \left| f_3 \varrho_2^P - i \frac{f_2}{\mu} (E_{P+k, \alpha} - E_{P^r} - \omega_k) \varrho_1^P \right| \mathbf{P} + \mathbf{k}^{\alpha} \right\rangle.$$

In the same way, the sum in (12), arising from the direct-interaction Hamiltonian H_2 , can be written

$$(17) \quad \sum_{P_1 N_1 i j} a_{P_1 N_1}^{ij} \langle \mathbf{P}^r \mathbf{N}^s | H_2 | \mathbf{P}_1^i \mathbf{N}_1^j \rangle = \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{f_2}{\mu} \right)^2 \sum_{\mathbf{h}, i, j} \left\{ a_{P-h, N+h}^{ij} \langle \mathbf{P}^r | \varrho_1^P | \mathbf{P} - \mathbf{h}^i \rangle \langle \mathbf{N}^s | \varrho_1^N | \mathbf{N} + \mathbf{h}^j \rangle + \right. \\ \left. + a_{P+h, N-h}^{ij} \langle \mathbf{N}^s | \varrho_1^N | \mathbf{N} - \mathbf{h}^j \rangle \langle \mathbf{P}^r | \varrho_1^P | \mathbf{P} + \mathbf{h}^i \rangle \right\}.$$

Considering now the sum

$$\begin{aligned} & \frac{f_2^2}{\mu^2} \sum_{k, i, \beta} \langle \mathbf{P}^r | \varrho_1^P | \mathbf{P} - \mathbf{k}^i \rangle \langle N^s | \varrho_1^N | \mathbf{N} + \mathbf{k}^\beta \rangle \frac{(E_{Pr} - E_{P-k, i} - \omega_k)(E_{N+k, \beta} - E_{Ns} - \omega_k)}{2\omega_k(E - E_{P-k, i} - E_{Ns} - \omega_k)} \times \\ & \times a_{\mathbf{P}-\mathbf{k}, \mathbf{N}+\mathbf{k}}^{i\beta} + \frac{f_2^2}{\mu^2} \sum_{\mathbf{k}, \alpha, j} \langle N^s | \varrho_1^N | \mathbf{N} - \mathbf{k}^j \rangle \langle \mathbf{P}^r | \varrho_1^P | \mathbf{P} + \mathbf{k}^\alpha \rangle \times \\ & \times \frac{(E_{Ns} - E_{N-k, j} - \omega_k)(E_{P+k, \alpha} - E_{Pr} - \omega_k)}{2\omega_k(E - E_{N-k, j} - E_{Pr} - \omega_k)} a_{\mathbf{P}+\mathbf{k}, \mathbf{N}-\mathbf{k}}^{\alpha j} \end{aligned}$$

contained in (12), one may note that a part of it will cancel the whole contribution given by the direct-interaction term H_2 . Writing the coefficients of the above terms as

$$\begin{aligned} & \frac{(E_{Pr} - E_{P-k, i} - \omega_k)(E_{N+k, \beta} - E_{Ns} - \omega_k)}{2\omega_k(E - E_{P-k, i} - E_{Ns} - \omega_k)} = \\ & = \frac{1}{2} \left\{ -1 + \frac{(E_{Pr} - E_{P-k, i})(E_{N+k, \beta} - E_{Ns}) + \omega_k(E - E_{N+k, \beta} - E_{Pr})}{\omega_k(E - E_{Ns} - E_{P-k, i} - \omega_k)} \right\}, \\ & \frac{(E_{Ns} - E_{N-k, j} - \omega_k)(E_{P+k, \alpha} - E_{Pr} - \omega_k)}{2\omega_k(E - E_{N-k, j} - E_{Pr} - \omega_k)} = \\ & = \frac{1}{2} \left\{ -1 + \frac{(E_{Ns} - E_{N-k, j})(E_{P+k, \alpha} - E_{Pr}) + \omega_k(E - E_{P+k, \alpha} - E_{Ns})}{\omega_k(E - E_{Pr} - E_{N-k, j} - \omega_k)} \right\}, \end{aligned}$$

it is readily seen that the sum over the terms which appear multiplied by -1 is exactly the opposite of (17); therefore any contribution given by the direct-interaction H_2 is removed from (12).

As it was anticipated by the form chosen for (7), processes in which nucleon pairs appear can make no contribution; therefore the indices $r, s, i, j, \alpha, \beta$, in the previous matrix-elements run only over 1, 2; the coefficients $a_{\mathbf{P}\mathbf{N}}^{rs}$ will be understood as elements of a matrix, product of two two-components matrices. Therefore, any product of the type

$$\sum_{i\beta} a_{\mathbf{P}-\mathbf{k}, \mathbf{N}+\mathbf{k}}^{i\beta} \langle \mathbf{P}^r | \varrho_2^P | \mathbf{P} - \mathbf{k}^i \rangle \langle N^s | \varrho_2^N | \mathbf{N} + \mathbf{k}^\beta \rangle,$$

may be written as the matrix-element r, s -th of the matrix-product

$$\langle \mathbf{P} | \varrho_2^P | \mathbf{P} - \mathbf{k} \rangle \langle \mathbf{N} | \varrho_2^N | \mathbf{N} + \mathbf{k} \rangle a_{\mathbf{P}-\mathbf{k}, \mathbf{N}+\mathbf{k}}.$$

Here the two matrices ϱ_2^P, ϱ_2^N operating on the spinors of the 2 nucleons have to be understood as multiplied by outer-product.

Choosing to calculate in the centre of mass system, we set $a_{\mathbf{P}\mathbf{N}} = a_{\mathbf{P}} \cdot \delta(\mathbf{P} + \mathbf{N})$; equation (12) becomes thus

$$\begin{aligned}
 (18) \quad & a_{\mathbf{P}}(E - 2E_{\mathbf{P}}) = \\
 & = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left\{ f_3^2 \langle \mathbf{P} | \varrho_2^{\mathbf{P}} | \mathbf{P} - \mathbf{k} \rangle \langle -\mathbf{P} | \varrho_2^{\mathbf{N}} | -(\mathbf{P} - \mathbf{k}) \rangle + \right. \\
 & + \frac{f_2^2}{\mu^2} \langle \mathbf{P} | \varrho_1^{\mathbf{P}} | \mathbf{P} - \mathbf{k} \rangle \langle -\mathbf{P} | \varrho_1^{\mathbf{N}} | -(\mathbf{P} - \mathbf{k}) \rangle [\omega_{\mathbf{k}}(E - E_{\mathbf{P}} - E_{\mathbf{P}-\mathbf{k}}) - (E_{\mathbf{P}} - E_{\mathbf{P}-\mathbf{k}})^2] + \\
 & + i \frac{f_2 f_3}{\mu} \left[(E_{\mathbf{P}} - E_{\mathbf{P}-\mathbf{k}}) (\langle \mathbf{P} | \varrho_1^{\mathbf{P}} | \mathbf{P} - \mathbf{k} \rangle \langle -\mathbf{P} | \varrho_2^{\mathbf{N}} | -(\mathbf{P} - \mathbf{k}) \rangle + \right. \\
 & + \langle \mathbf{P} | \varrho_2^{\mathbf{P}} | \mathbf{P} - \mathbf{k} \rangle \langle -\mathbf{P} | \varrho_1^{\mathbf{N}} | -(\mathbf{P} - \mathbf{k}) \rangle) + \omega_{\mathbf{k}} (\langle \mathbf{P} | \varrho_2^{\mathbf{P}} | \mathbf{P} - \mathbf{k} \rangle \langle -\mathbf{P} | \varrho_1^{\mathbf{N}} | -(\mathbf{P} - \mathbf{k}) \rangle - \\
 & - \langle \mathbf{P} | \varrho_1^{\mathbf{P}} | \mathbf{P} - \mathbf{k} \rangle \langle -\mathbf{P} | \varrho_2^{\mathbf{N}} | -(\mathbf{P} - \mathbf{k}) \rangle) \left. \right] \left. \right\} \frac{a_{\mathbf{P}-\mathbf{k}}}{E - E_{\mathbf{P}} - E_{\mathbf{P}-\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}}} + \\
 & + \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left\{ f_3^2 \langle -\mathbf{P} | \varrho_2^{\mathbf{N}} | -(\mathbf{P} + \mathbf{k}) \rangle \langle \mathbf{P} | \varrho_2^{\mathbf{P}} | \mathbf{P} + \mathbf{k} \rangle + \right. \\
 & + \frac{f_2^2}{\mu^2} \langle -\mathbf{P} | \varrho_1^{\mathbf{N}} | -(\mathbf{P} + \mathbf{k}) \rangle \langle \mathbf{P} | \varrho_1^{\mathbf{P}} | \mathbf{P} + \mathbf{k} \rangle [\omega_{\mathbf{k}}(E - E_{\mathbf{P}} - E_{\mathbf{P}+\mathbf{k}}) - (E_{\mathbf{P}+\mathbf{k}} - E_{\mathbf{P}})^2] + \\
 & + i \frac{f_2 f_3}{\mu} [(E_{\mathbf{P}} - E_{\mathbf{P}+\mathbf{k}}) (\langle -\mathbf{P} | \varrho_1^{\mathbf{N}} | -(\mathbf{P} + \mathbf{k}) \rangle \langle \mathbf{P} | \varrho_2^{\mathbf{P}} | \mathbf{P} + \mathbf{k} \rangle + \\
 & + \langle -\mathbf{P} | \varrho_2^{\mathbf{N}} | -(\mathbf{P} + \mathbf{k}) \rangle \langle \mathbf{P} | \varrho_1^{\mathbf{P}} | \mathbf{P} + \mathbf{k} \rangle) + \omega_{\mathbf{k}} (\langle -\mathbf{P} | \varrho_2^{\mathbf{N}} | -(\mathbf{P} + \mathbf{k}) \rangle \langle \mathbf{P} | \varrho_1^{\mathbf{P}} | \mathbf{P} + \mathbf{k} \rangle - \\
 & - \langle -\mathbf{P} | \varrho_1^{\mathbf{N}} | -(\mathbf{P} + \mathbf{k}) \rangle \langle \mathbf{P} | \varrho_2^{\mathbf{P}} | \mathbf{P} + \mathbf{k} \rangle) \left. \right] \left. \right\} \frac{a_{\mathbf{P}+\mathbf{k}}}{E - E_{\mathbf{P}} - E_{\mathbf{P}+\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}}}.
 \end{aligned}$$

Similarly (12') becomes

$$\begin{aligned}
 (18') \quad & a_{\mathbf{P}}(E - 2E_{\mathbf{P}}) = \\
 & = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left\{ f_3^2 \langle \mathbf{P} | \varrho_2^{\mathbf{P}} | \mathbf{P} - \mathbf{k} \rangle \langle -\mathbf{P} | \varrho_2^{\mathbf{N}} | -(\mathbf{P} - \mathbf{k}) \rangle + \right. \\
 & + \frac{f_2^2}{\mu^2} \langle \mathbf{P} | \varrho_1^{\mathbf{P}} | \mathbf{P} - \mathbf{k} \rangle \langle -\mathbf{P} | \varrho_1^{\mathbf{N}} | -(\mathbf{P} - \mathbf{k}) \rangle [\omega_{\mathbf{k}}^2 - (E_{\mathbf{P}} - E_{\mathbf{P}-\mathbf{k}})^2] + \\
 & + i \frac{f_2 f_3}{\mu} [(E - E_{\mathbf{P}-\mathbf{k}}) (\langle \mathbf{P} | \varrho_1^{\mathbf{P}} | \mathbf{P} - \mathbf{k} \rangle \langle -\mathbf{P} | \varrho_2^{\mathbf{N}} | -(\mathbf{P} - \mathbf{k}) \rangle + \\
 & + \langle \mathbf{P} | \varrho_2^{\mathbf{P}} | \mathbf{P} - \mathbf{k} \rangle \langle -\mathbf{P} | \varrho_1^{\mathbf{N}} | -(\mathbf{P} - \mathbf{k}) \rangle) + \omega_{\mathbf{k}} (\langle \mathbf{P} | \varrho_2^{\mathbf{P}} | \mathbf{P} - \mathbf{k} \rangle \langle -\mathbf{P} | \varrho_1^{\mathbf{N}} | -(\mathbf{P} - \mathbf{k}) \rangle - \\
 & - \langle \mathbf{P} | \varrho_1^{\mathbf{P}} | \mathbf{P} - \mathbf{k} \rangle \langle -\mathbf{P} | \varrho_2^{\mathbf{N}} | -(\mathbf{P} - \mathbf{k}) \rangle) \left. \right] \left. \right\} \frac{a_{\mathbf{P}-\mathbf{k}}}{E - E_{\mathbf{P}} - E_{\mathbf{P}-\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}}} + \\
 & + \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left\{ f_3^2 \langle -\mathbf{P} | \varrho_2^{\mathbf{N}} | -(\mathbf{P} + \mathbf{k}) \rangle \langle \mathbf{P} | \varrho_2^{\mathbf{P}} | \mathbf{P} + \mathbf{k} \rangle + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{f_2^2}{\mu^2} \langle -\mathbf{P} | \varrho_1^N | -(\mathbf{P} + \mathbf{k}) \rangle \langle \mathbf{P} | \varrho_1^P | \mathbf{P} + \mathbf{k} \rangle [\omega_k^2 - (E_{P+k} - E_P)^2] + \\
& + i \frac{f_2 f_3}{\mu} [(E_P - E_{P-k}) \langle -\mathbf{P} | \varrho_1^N | -(\mathbf{P} + \mathbf{k}) \rangle \langle \mathbf{P} | \varrho_2^P | \mathbf{P} + \mathbf{k} \rangle + \\
& + (-\mathbf{P} | \varrho_2^N | -(\mathbf{P} + \mathbf{k})) \langle \mathbf{P} | \varrho_1^P | \mathbf{P} + \mathbf{k} \rangle] + \omega_k \langle -\mathbf{P} | \varrho_2^N | -(\mathbf{P} + \mathbf{k}) \rangle \langle \mathbf{P} | \varrho_1^P | \mathbf{P} + \mathbf{k} \rangle - \\
& - \langle -\mathbf{P} | \varrho_1^N | -(\mathbf{P} + \mathbf{k}) \rangle \langle \mathbf{P} | \varrho_2^P | \mathbf{P} + \mathbf{k} \rangle \Big] \Big\} \frac{a_{P+k}}{E - E_{P+k} - E_P - \omega_k}.
\end{aligned}$$

The evaluation of the sum over the spin, which can be performed by means of (5), shows that a non-relativistic approximation, in which the momenta \mathbf{P} and \mathbf{k} are taken to be small compared with M , does not give any contribution. This is in complete agreement with the well-known 2-nd order result of the conventional theory, where the extreme relativistic approximation is zero. The case in which the momenta \mathbf{P} of the nucleons are negligible compared with M , but the momenta \mathbf{k} are taken into account, corresponds to an approximation in which the nucleons are supposed to be at rest, but the transfer of momentum during meson emission and absorption is not negligible. In this case (18) is

$$\begin{aligned}
(19) \quad a_P \frac{\eta^2 + P^2}{M} &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{2\omega_k D_k^2 (M - E_k - \omega_k)(M + E_k)^2}{(\boldsymbol{\sigma}_P \cdot \mathbf{k}) (\boldsymbol{\sigma}_N \cdot \mathbf{k})} \left\{ f_3^2 (a_{\mathbf{P}-\mathbf{k}} + a_{\mathbf{P}+\mathbf{k}}) - \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{f_2 f_3}{\mu} (M - E_k) (a_{\mathbf{P}-\mathbf{k}} + a_{\mathbf{P}+\mathbf{k}}) + \frac{f_2^2}{\mu^2} (M - E_k) (M - E_k - \omega_k) (a_{\mathbf{P}-\mathbf{k}} + a_{\mathbf{P}+\mathbf{k}}) \right\}.
\end{aligned}$$

Here

$$E_P \subseteq M, \quad E_{P \pm k} \subseteq E_k, \quad \mathbf{P} \pm \mathbf{k} \subseteq \pm \mathbf{k},$$

and according to Dancoff E is set to be

$$E = 2M - \eta^2/M.$$

Similarly (18') becomes

$$\begin{aligned}
(19') \quad -a_P \frac{\eta^2 + P^2}{M} &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{2\omega_k D_k^2 (M - E_k - \omega_k)(M + E_k)^2}{(\boldsymbol{\sigma}_P \cdot \mathbf{k}) (\boldsymbol{\sigma}_N \cdot \mathbf{k})} \left\{ f_3^2 (a_{\mathbf{P}-\mathbf{k}} + a_{\mathbf{P}+\mathbf{k}}) - \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{f_2 f_3}{\mu} (M - E_k) (a_{\mathbf{P}-\mathbf{k}} + a_{\mathbf{P}+\mathbf{k}}) + \frac{f_2^2}{\mu^2} (-\omega_k^2 + (M - E_k)^2) (a_{\mathbf{P}-\mathbf{k}} + a_{\mathbf{P}+\mathbf{k}}) \right\}.
\end{aligned}$$

Introducing the Fourier transform of a_P

$$(20) \quad U(\mathbf{S}) = \int d^3P a_P \exp[i(\mathbf{P} \cdot \mathbf{S})], \quad a_P = \frac{1}{8\pi^3} \int d^3S U(\mathbf{S}) \exp[-i(\mathbf{P} \cdot \mathbf{S})],$$

one gets for equation (19)

$$(21) \quad (-\eta^2 + A_2)U(\mathbf{S}) = U(\mathbf{S})(\boldsymbol{\sigma}_P \cdot \nabla_s)(\boldsymbol{\sigma}_N \cdot \nabla_s) \{F_1 + F_2 + F_3\}.$$

This equation is equivalent to a Schrödinger equation of the motion with the eigenvalue η^2 , in which the potentials

$$F_1 = \frac{M}{8\pi^3} f_3^2 \int d^3\mathbf{k} \frac{\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{S})]}{4E_k \omega_k (M + E_k)(\omega_k + E_k - M)},$$

$$F_2 = \frac{M}{8\pi^3} \frac{f_2 f_3}{\mu} \int d^3\mathbf{k} \frac{\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{S})](E_k - M)}{2E_k \omega_k (M + E_k)(\omega_k + E_k - M)},$$

$$F_3 = \frac{M}{8\pi^3} \frac{f_2^2}{\mu^2} \int d^3\mathbf{k} \frac{\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{S})](E_k - M)}{4E_k \omega_k (M + E_k)},$$

have been introduced. The behaviour of these functions for small S is

$$F_1 \subseteq S \text{ (regular)}, \quad F_2 \subseteq \log S, \quad F_3 \subseteq S^{-1}.$$

in the limit $E_k \rightarrow M$, these functions are:

$$\lim_{E_k \rightarrow M} F_1 = \frac{M}{8\pi^3} \frac{1}{8M^2} f_3^2 \int \frac{\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{S})]}{\omega_k^2} d^3\mathbf{k},$$

$$\lim_{E_k \rightarrow M} F_2 = \lim_{E_k \rightarrow M} F_3 = 0.$$

In this limit the functions F_1 , F_2 , F_3 behave exactly as in the adiabatic procedure, where on account of energy conservation F_2 is zero and where on account of the H_2 term F_3 does not occur.

From (19'), in the same case, one obtains a similar Schrödinger equation, in which the function F_3 is replaced by

$$\bar{F}_3 = -\frac{M}{8\pi^3} \frac{f_2^2}{\mu^2} \int d^3\mathbf{k} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{S})] \frac{\omega_k - E_k + M}{4E_k \omega_k (M + E_k)}.$$

This function has opposite sign than F_3 ; moreover, its limit for $E_k \rightarrow M$ is

$$\lim_{E_k \rightarrow M} \bar{F}_3 = -\frac{M}{8\pi^3} \frac{1}{8M^2} \frac{f_2^2}{\mu^2} \int d^3\mathbf{k} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{S})] = -\frac{f_2^2}{\mu^2} \frac{\delta(\mathbf{S})}{8M},$$

while the singularity for small S is the same as for F_3 . The singular δ -function had to be expected in the frame of the adiabatic approximation, where the

term H_2 , when taken into account, cancels it. One may note, however, that the \bar{F}_3 function would lead to a repulsive singular force.

By an improvement of the approximation, taking into account the first power of \mathbf{P}/M , one has the equation

$$\begin{aligned}
 (22) \quad & -a_P \frac{\eta^2 + P^2}{M} = \\
 & = \sum_k \frac{1}{4E_k \omega_k (M - E_k - \omega_k)} \left\{ \frac{(\boldsymbol{\sigma}_P \cdot \mathbf{k})(\boldsymbol{\sigma}_N \cdot \mathbf{k})}{M + E_k} (a_{\mathbf{P}-\mathbf{k}} + a_{\mathbf{P}+\mathbf{k}}) \cdot \right. \\
 & \cdot \left[f_3^2 - 2 \frac{f_2 f_3}{\mu} (M - E_k) + \frac{f_2^2}{\mu^2} (M - E_k - \omega_k)(M - E_k) \right] + \\
 & + \frac{(\boldsymbol{\sigma}_P \cdot \mathbf{P})(\boldsymbol{\sigma}_N \cdot \mathbf{k}) + (\boldsymbol{\sigma}_N \cdot \mathbf{P})(\boldsymbol{\sigma}_P \cdot \mathbf{k})}{2M} (a_{\mathbf{P}-\mathbf{k}} - a_{\mathbf{P}+\mathbf{k}}) \cdot \\
 & \cdot \left[f_3^2 - \frac{f_2^2}{\mu^2} (M - E_k - \omega_k)(M - E_k) \right] - \\
 & \left. - 2 \frac{f_2 f_3}{\mu} \frac{(\boldsymbol{\sigma}_P \cdot \mathbf{P})(\boldsymbol{\sigma}_N \cdot \mathbf{k}) - (\boldsymbol{\sigma}_N \cdot \mathbf{P})(\boldsymbol{\sigma}_P \cdot \mathbf{k})}{2M} \omega_k (a_{\mathbf{P}-\mathbf{k}} + a_{\mathbf{P}+\mathbf{k}}) \right\},
 \end{aligned}$$

from (19). The corresponding Fourier transform is

$$\begin{aligned}
 (23) \quad & (-\eta^2 + \Delta_2) U(\mathbf{S}) = U(\mathbf{S})(\boldsymbol{\sigma}_P \cdot \nabla_s)(\boldsymbol{\sigma}_N \cdot \nabla_s) \{F_1 + F_2 + F_3 - F_4 + F_5\} + \\
 & + \frac{(\boldsymbol{\sigma}_P \cdot \nabla_s U)(\boldsymbol{\sigma}_N \cdot \nabla_s) + (\boldsymbol{\sigma}_N \cdot \nabla_s U)(\boldsymbol{\sigma}_P \cdot \nabla_s)}{2} [-F_4 + F_5].
 \end{aligned}$$

The new functions,

$$\begin{aligned}
 F_4 &= \frac{M}{8\pi^3} \frac{f_2^2}{\mu^2} \int d^3\mathbf{k} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{S})] \frac{(E_k - M)}{4E_k \omega_k M}, \\
 F_5 &= \frac{M}{8\pi^3} f_3^2 \int d^3\mathbf{k} \frac{\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{S})]}{4E_k \omega_k (\omega_k + E_k - M)M},
 \end{aligned}$$

introduced by this approximation, for small S behave as

$$F_4 \propto S^{-2}, \quad F_5 \propto \log S.$$

On account of the operator $(\boldsymbol{\sigma}_P \cdot \nabla_s)(\boldsymbol{\sigma}_N \cdot \nabla_s)$, the function F_4 introduces into the equation the strong divergence $1/S^4$. One may note that this function represents, however, a repulsive force.

Moreover, the introduction of the momentum \mathbf{P}/M gives rise to potentials

which correspond to spin-orbit coupling. In fact, introducing the spin of the system, $\sigma = (\sigma_P + \sigma_N)/2$, writing

$$\nabla_s F(S) = \frac{F'(S)}{S} \cdot S,$$

and defining the differential operator $L = -i[S \times \nabla_s]$, one has

$$[(\sigma_P \cdot \nabla_s U)(\sigma_N \cdot \nabla_s) + (\sigma_N \cdot \nabla_s U)(\sigma_P \cdot \nabla_s)]F(S) = 2 \frac{F'(S)}{S} \{ (S \cdot \nabla_s) + (\sigma \cdot L) \} U(S).$$

Equation (23) can be written thus

$$\begin{aligned} (-\eta^2 + \Delta_2)U(S) &= U(S)(\sigma_P \cdot \nabla_s)(\sigma_N \cdot \nabla_s) \{F_1 + F_2 + F_3 - F_4 + F_5\} + \\ &+ \frac{1}{S} (F'_5 - F'_4) \{ (S \cdot \nabla_s) + (\sigma \cdot L) \} U(S). \end{aligned}$$

The last term is equivalent to a spin-orbit potential introduced into the Schrödinger equation.

A term corresponding to a spin-orbit coupling appears also in the scalar meson theory worked out by DANCOFF. This result, which is beyond the adiabatic approximation's results, may be considered as a particular feature of the non-adiabatic procedure itself.

With a similar procedure, equation (19') in this approximation gives the Schrödinger equation:

$$\begin{aligned} (23') \quad (-\eta^2 + \Delta_2)U(S) &= U(S)(\sigma_P \cdot \nabla_s)(\sigma_N \cdot \nabla_s) \{F_1 + F_2 + F_3 + \bar{F}_4 + F_5\} + \\ &+ \frac{1}{S} (\bar{F}'_4 + F'_5) \{ (S \cdot \nabla_s) + (\sigma \cdot L) \} U(S). \end{aligned}$$

Here the function

$$\bar{F}_4 = \frac{1}{8\pi^3} \frac{f_2^2}{\mu^2} \int d^3\mathbf{k} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{S})] \frac{\omega_k - E_k + M}{4E_k \omega_k},$$

has the same singularity, S^{-2} , as F_4 ; it gives rise, therefore to the same S^{-4} singularity in equation (23'). It corresponds, on the contrary, to an attractive force; in the limit $E_k \rightarrow M$, one has

$$\lim_{E_k \rightarrow M} F_4 = 0, \quad \lim_{E_k \rightarrow M} \bar{F}_4 = \frac{1}{4M} \delta(S) \frac{f_2^2}{\mu^2}.$$

Again, in this limit, there is agreement with the conventional perturbation procedure.

3. — Discussion of the results.

a) The non-relativistic approximation in the present procedure, which in the scalar case gives rise to Yukawa's potential and corresponds formally to the adiabatic approximation, does not give any contribution for the pseudo-scalar case. This is in agreement with the conventional perturbation procedure.

b) A second approximation, in which the momenta \mathbf{P} of the nucleons are neglected, although their recoil has been taken into account, gives rise to an equation for the system's motion which is identical in form with the Schrödinger equation of motion in the second step of the adiabatic approximation, containing potentials which correspond to tensor-forces.

The terms in $(f_2/\mu)^2$, arising from the direct-interaction Hamiltonian H_2 , do not cancel completely with the corresponding terms obtained from the H_1 term, which describes the interaction between nucleons and mesons, as it is the case in the conventional perturbation procedure (VAN HOVE). The remaining part introduces into the Schrödinger equation of motion a potential, which for small relative distance of the nucleons behaves as $1/S^3$. The sign of this function is, however, opposite to the sign of the other functions; that means, this singular function introduces a repulsion.

When the direct-interaction Hamiltonian is not taken into account, the adiabatic procedure gives rise to a contact-term in $(f_2/\mu)^2$ arising from the term H_1 of the interaction Hamiltonian.

In the present procedure, the corresponding part in $(f_2/\mu)^2$ has the same singularity as in the case in which the direct-interaction term H_2 is taken into account. However, this function has the same sign as the other potentials and therefore in this case the highly singular function represents a strong attraction for the two particles. On the other hand, in the limit $E_k \rightarrow M$, the functions in $(f_2/\mu)^2$ become zero and $\delta(\mathbf{S})$ respectively, in agreement with the conventional perturbation procedure.

The term arising from f_3^2 is a regular function of the relative distance of the two particles and in the limit $E_k \rightarrow M$ it becomes Yukawa's potential. The term in $f_2 f_3/\mu$ which in the adiabatic approximation is zero, due to energy-conservation, does appear in the present evaluation and leads to a divergence of the order $1/S^2$ in the potentials. In the limit $E_k \rightarrow M$ this function becomes zero. In this non-relativistic limit there is agreement with the adiabatic procedure.

c) The higher approximation, in which the momentum \mathbf{P} of the nucleons is taken into account to the first power of \mathbf{P}/M , introduces forces depending

on the momenta of the nucleons, which can be expressed in terms of spin-orbit potentials.

In this approximation, however, the divergences are higher than in the previous approximation, *b*). In particular, the $(f_2/\mu)^2$ term introduces a singularity $1/S^4$ into the equation. The sign of this function is however opposite to the sign of the other potentials, that means a repulsion. The same divergence appears if the direct-interaction Hamiltonian is neglected, but the sign of the singular potentials is positive. The limits of these functions for $E_k \rightarrow M$ are zero and $\delta(\mathbf{S})$ respectively.

The function $F_1 + F_5$ in f_3^2 , behaves in this case as $\log S$, which means that in the equation of the motion a $1/S^3$ term appears. The singularity of the $f_2 f_3/\mu$ term does not increase in this approximation. The fact that for higher momenta the divergence of the interaction potentials is increased, has been emphasized by LEVY. In his evaluation, which lies in the frame of the adiabatic approximation, and therefore takes into account the only f_3^2 term, as given by VAN HOVE, the possibility of cutting off high momenta of the nucleon in order to avoid the singularity arising from high momenta, is considered to be without physical meaning. Here, on the contrary, the neglecting of higher momenta of the nucleons is implied by the expansion in powers of P/M ; it is shown, in fact, that the consideration of P^2/M^2 in the equation for the coefficients, would no longer allow the definition of a potential for the system.

A comparison with Levy's results could be performed only in the frame of the pure pseudo-scalar coupling ($f_3 = f_1$; $f_2 = 0$). For low momenta the potential would be a regular function of S , while for higher momenta the divergence $1/S^2$ would appear as in Levy's work. For very high momenta the comparison is pointless because it is not possible the definition of a potential in the frame of the non-adiabatic procedure.

One may conclude that in the non-adiabatic procedure the divergences arising from the velocity-dependent part of the Hamiltonian are not sufficiently avoided by the introduction of the direct-coupling term in the Hamiltonian; nevertheless, these divergences represent repulsive forces and their singularity is up to $1/S^4$ in the case *c*).

I would like to express my gratitude to Professor NIELS BOHR for extending the hospitality of the Institute for Theoretical Physics and for the fellowship under which this work has been carried out. I am also grateful to Professor C. MÖLLER for suggesting the problem and for his assistance, and to the staff of the Institute for stimulating and helpful suggestions.

I wish further to express my gratitude to Prof. G. VALLE, Direttore dell'Istituto di Fisica « A. Righi » in Bologna, who helped me to obtain the leave of absence and favoured my stay in Copenhagen.

REFERENCES

1. S. M. DANCOFF: *Phys. Rev.*, **78**, 382 (1950).
2. L. VAN HOVE: *Phys. Rev.*, **75**, 1519 (1949).
3. M. M. LÉVY: *Phys. Rev.*, **84**, 441 (1951).

RIASSUNTO

Il metodo non adiabatico di Dancoff per il problema di due nucleoni interagenti con il campo mesonico è applicato al caso del campo mesonico pseudo-scalare, neutro, descritto dalla funzione Lagrangiana contenente i due tipi di costanti di accoppiamento, pseudo-scalare e pseudo-vettoriale. Il procedimento è limitato al secondo ordine nelle costanti di accoppiamento. Trattando lo stesso problema con procedimento adiabatico, VAN HOVE ha dimostrato che il termine di diretta interazione fra i nucleoni, contenuto nell'Hamiltoniana completa del sistema, accanto al termine di interazione nucleoni-mesoni, elimina completamente il cosiddetto « termine di contatto », che apparirebbe accanto alla funzione di Yukawa, come interazione fra i due nucleoni, quando si trascurasse nell'Hamiltoniana il termine di diretta interazione. Il presente formalismo non permette l'eliminazione completa della funzione, che, nel procedimento ordinario, dà luogo al « termine di contatto ». Il potenziale che ne risulta introduce nell'equazione del moto del sistema una divergenza che non va oltre la 4^a potenza della distanza relativa delle due particelle. Se si trascura il termine di diretta interazione nell'Hamiltoniana, la funzione, che corrisponde al termine di contatto del procedimento ordinario, introduce nell'equazione del moto la stessa divergenza che nel caso precedente. I rimanenti potenziali di interazione presentano divergenze inferiori a quella introdotta dalla funzione di Yukawa nel procedimento adiabatico. Il limite relativistico delle funzioni così ottenute riconduce esattamente ai risultati dati dal procedimento adiabatico convenzionale.

On nuclear explosions produced by primary protons in emulsions exposed in the high atmosphere.

G. CORTINI, A. MANFREDINI and G. SEGRÉ (*)

Istituto di Fisica dell'Università, Centro di Studio per la Fisica Nucleare del C.N.R. - Roma

(ricevuto il 14 Maggio 1952)

Summary. — Nuclear explosions produced by cosmic radiation have been studied in Ilford G5, 400 μ emulsions, which were exposed at about 60 g/cm² from the top of the atmosphere for about two hours. The analysis of these stars made it possible to find out the characteristics of events produced by primary protons only. Our findings, compared with theories on meson production lead us to the conclusion that the plural theory is not sufficient to explain the experimental data. It seems probable that the production of mesons should have a fairly high multiplicity even for comparatively low energies (of the order of 5 GeV). On the basis of the comparison of our data with those of other authors, concerning emulsions exposed at 3500 m above s.l., a rough scheme of the development of the nucleonic component in the atmosphere is suggested. The high energy part of this component maintains approximately its spectrum and is absorbed with an absorption length of 110 g/cm².

Introduction.

It is rather surprising that two years after the fabrication of the first beta-sensitive emulsions, there is still very little systematic research on nuclear explosions produced in emulsions by cosmic radiation, and that the data which can be obtained from it are very poor. This depends to a large extent on the fact that many research workers who study cosmic radiation with the photographic emulsion technique have concentrated their attention upon particular

(*) At present with the Sezione Ricerche Scientifiche delle Cartiere Vita Mayer & Co., Milano.

events as for instance the heavy nuclei of the primary component and their interaction with matter or the production and the decay of heavy mesons or those nuclear explosions to which particular interest is attached because of the extremely high energy with which they are associated. Nevertheless it is reasonable to think that an extension of our knowledge of nuclear explosions of any energy, will be very interesting for the study of cosmic radiation. It is well known that such explosions which appear as «stars» in photographic emulsions, associated with one or more minimum tracks are generated in the great majority of cases by the nucleonic component ⁽¹⁾. Therefore the knowledge of their frequency of occurrence and their spectra of multiplicity at different altitudes and different latitudes may give important information about this component (as it appears to us from the conclusion of this work) with regard both to its development in the atmosphere and its interaction with matter. As was said before, the papers published so far on this subject are comparatively few ⁽²⁻¹⁰⁾, moreover, in the majority of them, the experimental data are not reported in great detail, there are only curves or tables pointing out one or two details and they can not be used for a larger and systematic comparison. For this purpose we have found the tables published by the Bristol group ⁽⁷⁻⁸⁻⁹⁾ extremely useful. On these lines we have compiled our Table II, with only a few simplifications which, we hope, will not detract from its usefulness or clarity.

In the present paper (in which we intend to extend some results previously published ⁽¹¹⁾, obtained from the observation of photographic emulsions exposed at great altitude by means of balloons) we have tried to improve the methods

(1) G. BERNARDINI, G. CORTINI and A. MANFREDINI: *Phys. Rev.*, **76**, 1792 (1949); B. FERRETTI: *Nuovo Cimento*, **6**, 379 (1949); B. ROSSI: *Cosmic Rays*, cap. 8 (in the press).

(2) J. J. LORD: *Phys. Rev.*, **81**, 901 (1951).

(3) E. O. SALANT, J. HORNBOSTEL, C. B. FISK and J. E. SMITH: *Phys. Rev.*, **79**, 184 (1950).

(4) M. M. SHAPIRO, B. STILLER, N. BIRNBAUM and F. W. O'DELL: *Phys. Rev.*, **83**, 455 (1951).

(5) F. BOUSSER, M. DELLA CORTE and L. JOUNEAU: *Ric. Scient.*, **21**, 43 (1951).

(6) N. PAGE: *Proc. Phys. Soc., A*, **63**, 250 (1950).

(7) R. H. BROWN, U. CAMERINI, P. H. FOWLER, H. HEITLER, D. T. KING and C. F. POWELL: *Phil. Mag.*, **40**, 862 (1949).

(8) U. CAMERINI, T. COOR, J. H. DAVIES, P. H. FOWLER, W. O. LOCK, H. MUIRHEAD, N. TOBIN: *Phil. Mag.*, **40**, 1073 (1949).

(9) U. CAMERINI, J. H. DAVIES, C. FRANZINETTI, P. H. FOWLER, W. O. LOCK, H. MUIRHEAD, D. H. PERKINS and G. YEKUTIELI: *Phil. Mag.*, **42**, 1241 (1951).

(10) U. CAMERINI, J. H. DAVIES, C. FRANZINETTI, W. O. LOCK, D. H. PERKINS and G. YEKUTIELI: *Phil. Mag.*, **42**, 1261 (1951).

(11) G. CORTINI, A. MANFREDINI and G. SEGRÈ: *Nuovo Cimento*, **9**, 191 (1952).

used for identifying the primary particles (protons, neutrons or α 's) responsible for the stars we have observed. As one sees below, this may substantially change the statistics concerning the explosions generated at very high altitude, while it presumably leaves practically unchanged those obtained at high mountain altitude, where almost no primary α -particles arrive and where, on the other hand, the radiation is rather more collimated around the vertical: both reasons make the identification of the « primaries » much easier (compare: n. 3 and n. 4).

This explains why, in discussing our results, we have compared them only with the data obtained at high mountain altitude by the Bristol group (⁷).

1. — Experimental apparatus.

The experiment has been performed using Ilford G5 Nuclear Emulsions 400 μ thick, exposed vertically in boxes of 12 plates each, all of which were kept in a thermos containing ice. The total weight of the gondola was 2 kg; almost everything was made of light elements. The plates were launched by sounding balloons from Milan at the geomagnetic latitude of $\sim 47^\circ$ N; they reached an altitude corresponding to 37 g/cm² from the top of the atmosphere, and then came down to 75 g/cm² where they floated until the automatic release worked. As far as the star production is concerned, the flight lasted 120 min. and the average altitude was 60 g/cm².

8.9 cm³ of emulsion were scanned. Every star was studied with an immersion objective and great care was taken in observing the minimum ionization tracks. The grain density of the minimum tracks in our plates was $K_{\min} = 33$ grains/100 μ . We have not considered any star having its centre at a distance of less than 15 μ from the glass or the surface of the emulsion: this of course, has been taken into account in the evaluation of the volume of emulsion which has been scanned.

The scanning was done using dry objectives. However a control performed using immersion objectives showed that the efficiency of this procedure even for small stars was greater than 95%.

2. — Total intensity of stars.

In table I a comparison is given between the total frequency of occurrence of stars with more than 3 tracks as found by us and by other authors at high altitude at about 50° N geomagnetic latitude. The Bristol data are noticeably low in comparison with the others, and this fact is not easily understood.

The other data on the contrary, agree fairly well with each other allowing for the inevitable systematic errors of balloon experiments.

TABLE I. — *Frequency of nuclear disintegrations with three or more prongs in emulsions at 50° geomagnetic latitude and various altitude.*

Height (g/cm ²)	15 g/cm ²	50 g/cm ²
LORD	2390	2030
SALANT	3200 (*)	—
Bristol	—	1110
Roma	—	2270

(*) The figure given by Salant includes also stars with two prongs.

3. — Stars produced by protons, neutrons and α -particles of high energy.

The identification of stars produced by protons (p -stars) ⁽¹²⁾ has been obtained by several Authors ^(2,3,7) using the following criterion: a star is a « p -star » if it is associated with at least one minimum ionization track in the upper hemisphere. All the other stars (q -stars, following SALANT and co-workers ⁽³⁾) should, in principle, be identified as « n -stars » (stars due to neutron primaries) or « α -stars » (stars due to α -particles). As far as we know the only attempt to perform this identification has been made by LORD: his method however is a statistical one which allows him to evaluate the probable number of α -stars but not to decide which is which.

The methods mentioned above are not sufficient and can easily lead to mistakes especially when the number of shower particles is high. Because of the great interest attached to the high energy events, we have therefore performed an accurate study of all stars having more than 3 shower particles ($s \geq 4$), determining the axis of the shower and the average aperture of the shower with respect to the axis.

As shower particles we have taken all those having a grain density $K = 1.4 K_{\min} \sim 46$ grains/100 μ . A star was considered as α - or p -star only if the supposed ionizing primary was at an angle with the axis smaller than the average aperture of the shower. This method has lead us to consider as n -stars many which otherwise would have been considered as p -stars and allowed us to single out the α -stars.

⁽¹²⁾ More precisely it is a question of the stars produced by particles of unit charge: a certain number of these will certainly be due to π -mesons, but we may assume that this contribution is small and we shall not take it into account.

This method may leave some doubt when the number of shower particles is 4, and in some cases when it is 5. For higher multiplicity we believe it gives reliable results, with very few exceptions.

Because of the great importance of identifying the α -stars we have checked this method by examining in how many cases a p -star was associated with a secondary proton going backwards with the right ionization and the right angle to be mistaken for a primary α -particle: out of 101 p -stars, only 2 of them could have been taken as α -stars had not the primary proton been detected.

We have also counted the number of δ -rays associated with 4 supposed primary α 's (this could be done only on those 4 tracks which were sufficiently long). All measurements were consistent with the assumption that those tracks were α -minimum tracks. This method cannot be applied to stars having $s \leq 3$; we have therefore called them p -stars or q -stars following the common criterion.

Table II contains all the stars which we have examined, the events being classified according to the number of shower particles, the number of grey and black tracks (N) and the type of their « primary particle ».

4. - Multiplicity distribution curves of p , n , and α -stars.

Following the criterion outlined in n. 3, we have studied the observed stars from the point of view of their multiplicity of shower particles: the p -curve of fig. 1 shows the integral multiplicity spectrum for stars generated by protons. As abscissae the number (s) of shower particles is given. The α -curve, concerns α -stars with $s \geq 4$, for $s \leq 3$ we have extrapolated.

The n curve for $s \geq 4$ is based only on the n -stars, while for $s \leq 3$ is based on the totality of the q -stars ($q = n + \alpha$); of these the α 's are only a small fraction. As one can see from fig. 1 the behaviour of the two curves (p and n) are entirely different from one another. It may be worth pointing out that only the separation of the α -stars from the n -stars (for $s \geq 4$) made it possible to show this fact beyond any doubt. As far as the multiplicity of the N -tracks is concerned, table II shows that for $N \geq 19$ the p -stars and the n -stars are about equally numerous (25 p versus 19 n). This seems rather strange if at the same time we take into account both the difference between the multiplicity spectra of the p -stars and the n -stars, and the fact that the production of a star with 19 black or grey tracks requires a rather high energy ($> \sim 2$ GeV) (?). Out of the 19 n -stars which we have considered 13 have $s \leq 3$; probably a large part of them consists of unidentified α -stars.

The main point of interest, in the analysis of fig. 1 lies in the fact that it makes it possible to separate the fraction of stars which are generated by the

TABLE II.

	$\frac{s}{N}$		s																	$\frac{s}{N}$	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	Total
<i>p</i> -stars		1	9	1	—	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	13
		53	38	16	7	4	3	2	4	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	129
		89	54	19	14	5	11	4	1	3	3	1	1	2	—	—	—	—	—	—	207
		63	45	23	12	11	2	3	3	—	1	—	1	—	—	1	—	—	—	—	165
		16	14	10	3	7	2	2	2	3	2	1	—	—	—	—	—	—	—	—	64
		1	4	6	2	1	—	1	3	1	—	2	—	—	—	—	—	—	—	—	21
		1	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1	—	—	—	—	4
		224	164	75	39	28	19	13	13	7	8	5	3	2	1	—	2	—	—	—	603
<i>n</i> -stars		—	1	2	4	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3
		238	12	4	1	1	—	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	258
		336	23	6	2	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	368
		378	59	15	4	6	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	463
		94	37	15	8	4	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	160
		15	12	2	2	2	1	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	35
		3	1	6	1	2	3	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	17
		1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2
α -stars		1065	146	50	18	15	7	4	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1306
		—	—	—	—	1	2	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4
		—	—	—	—	2	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4
		—	—	—	—	—	2	—	1	2	—	—	—	2	—	—	—	—	—	—	7
		—	—	—	—	1	—	—	1	—	—	—	—	1	1	—	—	—	1	—	5
		—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
		—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	1
		—	—	—	—	—	4	6	1	1	4	—	—	1	2	1	1	—	—	1	22

Classification of all the stars found in 8.9 cm³ of emulsion according to the number of shower particles (*s*), the number of black and grey tracks (*N*) and the kind of generating particle (proton, neutron, or α -particle). The stars classified as *n* include also α -stars (not identified) only for *s* ≤ 3. The stars with *N* = 2 have been separated from those with *N* = 3 only in the classification of the α -stars because the criterion for detection of α -stars is *N* = 2 only.

primary component of cosmic radiation. In fact the neutrons have certainly a secondary origin: on the other hand we may assume that in the interaction of a primary proton with a nucleus of the air, about equal numbers of neutrons

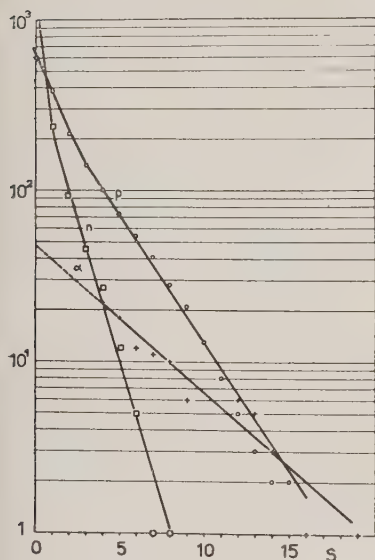


Fig. 1. — Integral multiplicity spectra of shower particles for stars at 60 g/cm^2 . Abscissae: number of shower particles (s); ordinates: absolute number of stars having $\geq s$ shower particles.

○ Stars produced by protons, curve p ,
 □ » » » neutrons, » n ,
 + » » » α -particles, » α .

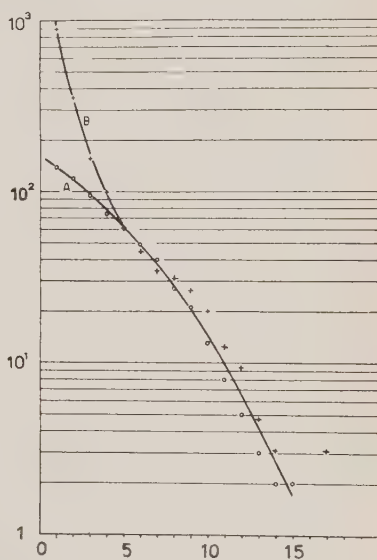


Fig. 2. — Integral multiplicity spectra of shower particles. Abscissae and ordinates as in fig. 1. ○ Stars produced by primary protons. Absolute number (curve A). + Total number of stars found at mountain altitudes (Bristol group 3500 m). The curve B is normalized to the curve A at $s = 5$.

and protons are produced. Also the energy of the particles which produce stars with at least two shower particles is so high (⁹) that the ratio p/n for these particles is not appreciably altered by the loss of energy due to ionization.

So, for $s \geq 2$ the number of p -stars, produced by secondary particles will be almost equal to the number of n -stars and the difference between the curves p and n of fig. 1 gives the multiplicity spectrum for stars produced only by the primary component (⁵) (fig. 2, curve A). The inflexion of the spectrum for $s \leq 5$ is, probably, partially due to the geomagnetic cut-off: a precise estimate of this effect is obviously hard to make.

It is interesting to compare the multiplicity-spectrum obtained by us with

that obtained at 3500 m by the Bristol group (⁷). The comparison must be taken with a certain amount of caution, because clearly results obtained in different laboratories may be subject to different systematic errors, nevertheless, until further experiments are performed, we consider it worth making. Curve *B*, fig. 2, represents the Bristol spectrum, and is obtained by taking together the *p*- and *n*-stars. These stars are taken together because from the Bristol data the ratio p/n does not vary appreciably with s (for $s \geq 2$): more exactly, the ratio is ~ 1 within statistical error. Naturally at 3500 m there are no longer α -stars in any appreciable proportion.

It is clear from the figure that for $s \geq 5$ the behaviour of the spectrum due to primary particles is the same as that due to particles observed at mountain altitudes. For $s < 5$, however, the two curves separate, and in fact the curve *B* behaves like that of the *n*-stars which we have observed at high altitude (curve *n*, fig. 1).

We may discuss all these experimental data in the light of the various theories of the production of meson-showers which have been proposed (¹³⁻¹⁸).

In the first place, the fact that we have been able to single out, to a good approximation, the stars produced by primary protons, permits us to compare their multiplicity-spectrum with those deducible theoretically. In making this comparison (nn. 5, 6, 7) we shall use, of course, the primary proton energy-spectrum already determined by various authors (¹⁹). We note that the Bristol school has recently made a similar comparison (¹⁰), deducing the energy of the primaries directly from their multiple scattering in the emulsion. This method has the advantage that each star may be analysed individually, which is not possible with the method which we suggest. On the other hand, however, this latter method, permits us to make the comparison throughout the whole of the energy-spectrum of the cosmic radiation.

Secondly we may discuss the available data, both for high and low altitudes, in terms of the development of the nucleonic component in the atmosphere (nn. 8, 9), and naturally, in this case too, the conclusions reached will depend on the particular theory used.

5. - Comparison of the multiplicity-spectrum with the theory of Heisenberg.

In this theory the production of mesons in a nucleon-nucleon collision occurs with a multiplicity which, for sufficiently high energies, is given by

(¹³) W. HEISENBERG: *Nature*, **164**, 65 (1949).

(¹⁴) W. HEITLER and L. JÁNOSSY: *Proc. Phys. Soc.*, A, **62**, 374 (1949).

(¹⁵) W. HEITLER and L. JÁNOSSY: *Proc. Phys. Soc.*, A, **62**, 669 (1949).

(¹⁶) W. HEITLER and L. JÁNOSSY: *Helv. Phys. Acta*, **23**, 417 (1950).

(¹⁷) E. FERMI: *Progr. Theor. Phys.*, **5**, 570 (1950).

(¹⁸) G. WATAGHIN: *Nuovo Cimento*, **7**, 166 (1950).

the relation

$$(1) \quad n \sim \frac{\varepsilon/m_\pi}{\log(\varepsilon/m_\pi)},$$

where m_π is the mass of the π -meson, and ε the available energy in the centre of mass system. The collision is supposed to be completely inelastic, and in this case

$$\varepsilon = \sqrt{2MW} - 2M,$$

where M is the nucleon mass, and W the total energy of the incident nucleon in the laboratory system.

When the integral energy spectrum is known, it is easy to deduce the integral multiplicity spectrum of the mesons produced. Assuming a primary power spectrum of the form $N(> W) = W^{-\gamma}$ with $\gamma = 1.1$ (19), the multiplicity obtained is given by curve A, fig. 3. The curve has been normalized to the experimental value for $s = 5$, and seems to be in qualitative agreement with the experimental finding. For low multiplicities the equation (1) probably ceases to apply, and for this reason the first part of curve A, fig. 3, has been drawn dotted. The horizontal part of the curve below $s = 3$ is due to the geomagnetic energy cut-off, which is taken to be at a total energy of 4 GeV. The total intensity thus obtained is rather lower than that observed, and this shows that, assuming the equation (1) to apply also to low energies, the normalization must be changed so as to raise the theoretical curve, without however changing its order of magnitude (cf. n. 9).

In carrying out the calculations we have not taken account of the presence of protons among the observed shower particles, nor of the fact that from the number of mesons must be deducted

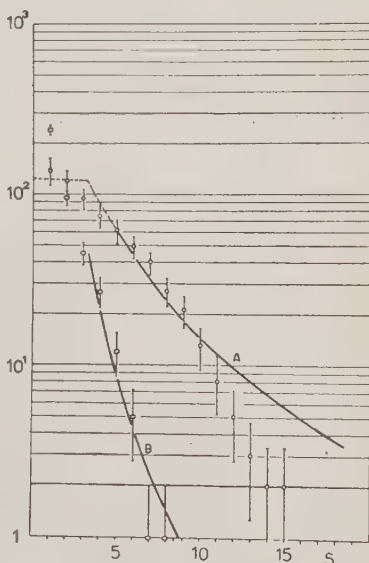


Fig. 3. — Comparison of the experimental data with the theory of Heisenberg. Abscissae and ordinates as in fig. 1. \circ Stars produced by primary protons. Curve A: spectrum calculated with $\gamma = 1.1$. \square Stars produced by neutrons at 20 000 m. Curve B: spectrum calculated with $\gamma' = 2\gamma = 2.2$.

(19) S. F. SINGER and J. A. VAN ALLEN: *Phys. Rev.*, **78**, 819 (1950); M. A. POMERANTZ: *Phys. Rev.*, **75**, 1721 (1949); M. L. VIDALE and M. SCHEIN: *Nuovo Cimento*, **8**, 774 (1951).

a certain percentage of neutral mesons, but we may suppose that to a first approximation these two effects compensate each other. In fact, it is known that $\sim 1/3$ of the total number n of mesons are neutral mesons ⁽²⁰⁾, and that $\sim 1/4$ of the total number s of observed shower particles are protons of minimum ionization ⁽²¹⁾. Consequently $(2/3)n \sim (3/4)s$ and so $n \sim s$. This simplification is implicit in the following work. Furthermore, we are justified in assuming that for the energies in which we are interested, the chief contribution to the production of mesons is due to a single collision, because of the rapid degradation of primary energy at the first collision. We have ignored therefore the possibility of secondary or higher order collisions inside the nucleus, and this approximation clearly tends to reduce expected multiplicities. In spite of this, however, the above theory of Heisenberg gives, as the preceding discussion shows, values for the multiplicity which are probably too large, although of the right order of magnitude.

6. - Comparison of the multiplicity-spectrum with the theory of Heitler and Jánossy.

The plural theory of HEITLER and JÁNOSY has been more often used than the multiple theory as a basis for calculation and comparison with experiment ⁽²²⁾, largely because it is developed in a particularly simple and at the same time complete form, and also because it contains several parameters which give it a certain flexibility.

HEITLER and JÁNOSY have developed their theory by successive approximations. In a first approximation ⁽¹⁵⁾ they assume that only the incident particle is responsible for the successive production of mesons inside the nucleus, and in this way find a good agreement with the data of the Bristol group obtained at mountain altitudes ⁽⁷⁾. In a second approximation ⁽¹⁶⁾, developed to explain showers of extremely high multiplicity, they take into account also the recoil nucleons, which are themselves capable of generating mesons, and give rise to a cascade process in the interior of the nucleus.

We have compared the theory in both its forms with our data, taking account of the following considerations:

1) The data of the Bristol group referred to above are not of stars produced solely by primary particles. As we have seen in n. 4, the selection of such stars changes considerably the form of the multiplicity-spectrum for low-energies, showing that at mountain altitudes there may be present secondary par-

⁽²⁰⁾ A. G. CARLSON, J. E. HOOPER and D. T. KING: *Phil. Mag.*, **41**, 701 (1950).

⁽²¹⁾ P. H. FOWLER: *Phil. Mag.*, **41**, 169 (1950).

⁽²²⁾ H. MESSEL: *Phys. Rev.*, **83**, 21, 26 (1951); K. SITTE: *Phys. Rev.*, **78**, 714 (1950); P. CALDIROLA and G. ZIN: *Nuovo Cimento*, **7**, 575 (1950).

ticles having an energy-spectrum appreciably different from the power spectrum of the primaries.

2) The percentage of protons among the observed shower particles is considered today to be 25% ⁽²¹⁾, and not 50% as assumed by HEITLER and JÁNOSSY. It follows from this, as remarked in the preceding section, that we may take $s \sim n$.

3) The absorption and interaction lengths have a ratio different from that assumed by HEITLER and JÁNOSSY.

4) The exponent of the primary energy spectrum is believed today to be much nearer 1.1 than 1.5, the value used by HEITLER and JÁNOSSY.

Proceeding in a manner similar so that of HEITLER and JÁNOSSY in their original work ⁽¹⁴⁻¹⁵⁾ we have examined how the parameters ω and a_A ⁽²³⁾ must change in order to bring the theoretical curve into agreement with the experimental one. Since the curves given by HEITLER and JÁNOSSY are much too steep (curve A, fig. 4) it is evidently necessary to take parameters corresponding to nucleon-nucleon collision cross sections larger then those used by these Authors. The calculation shows that in order to obtain an approximate agreement (curve B, fig. 4) the values of the parameters must be such as are clearly not physically acceptable ⁽²³⁾. This could signify that the cascade inside the nucleus gives a very large contribution to the shower.

HEITLER and JÁNOSSY, having obtained good agreement for low multiplicities with reasonable parameters, introduce the cascade process ⁽¹⁶⁾ in such a way that its effect is noticeable only for very high multiplicities. To do this, they attribute to the recoil nucleon an energy which is only 1/8 of that

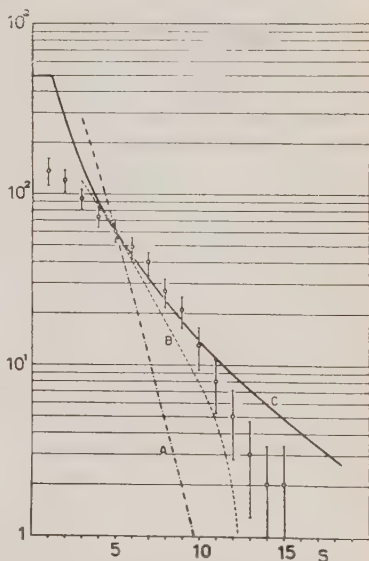


Fig. 4. - Comparison with the theory of Heitler and Jánossy. Curve A: theory without multiplication, with $\omega = 0.6$, $a_A = 4$ and 9. Curve B: idem, with $\omega = 0.8$, $a_A = 7$ and 14. Curve C: theory with multiplication.

⁽²³⁾ With $A_{\text{geom}} = 65 \text{ g/cm}^2$ and $A_{\text{abs}} = 108 \text{ g/cm}^2$, equation (23) of H.J. ⁽¹⁴⁾ becomes

$$\Phi(1 - \omega_{\gamma+1}) = 1.7 \left(\frac{\hbar}{m_{\pi} c} \right)^2,$$

available, and to the meson created $1/8$ more. The resulting curves to which the Authors themselves give only a qualitative value contain a too large number of small multiplicities, and so are not even in approximate agreement with our results.

Because of this we have made an exploratory calculations using the plural theory with cascade multiplication, and starting with the assumptions which most favour meson production. The cascade will clearly develop most fully if in each collision inside the nucleus the energy which does not go into the meson created is equally divided between the two colliding nucleons. Since the absorption length in the atmosphere indicates that about $1/5$ of the energy available must go into the creation of each meson, then on the above scheme $2/5$ of the initial energy remains for each of the two nucleons. The energy of the nucleons will evidently diminish in geometrical progression as the cascade develops: we have therefore assumed that below a certain critical energy meson production no longer takes place, and for this threshold we take the value given by experiment (v. CAMERINI *et al.* ⁽¹⁰⁾, point 1 of the conclusions) of 2 GeV (kinetic energy).

To calculate the probabilities for the various collisions, we have adopted a simple model which enables us to follow easily what happens inside the nucleus. We have developed a uni-dimensional theory for homogeneous nuclear matter of finite thickness, and then averaged the probabilities so obtained according to the collision parameter of the nucleus and the composition of the emulsion. We have supposed further that the nucleus is perfectly transparent to the mesons produced.

All these assumptions tend to favour high multiplicities more than physically reasonable. In particular, the assumption that the nucleus is perfectly transparent to the produced mesons is certainly exaggerated, and indeed contradicts rather strongly the idea itself of a cascade process. So also, the cal-

and hence

$$k = \frac{\Phi}{(\hbar/m_{\pi}c)^2} = \frac{1.7}{1 - \omega_{\gamma+1}}.$$

On the other hand (17) of H.J. ⁽¹⁴⁾ is

$$a_A = \Phi N d_A.$$

These expressions show that a_A and ω are not independent. Nevertheless, following H.J., we have considered them only qualitatively true, and have determined the parameters from the comparison with the experimental data. For $\omega = 0.8$, $a = 14$ for Ag, Br, and $a = 7$ for light emulsion nuclei (fig. 4, curve B) we find $k \sim 8 \gg \pi$. This means that the cross-section for nucleon-nucleon collision is more than twice the geometric one. Moreover, since a represents the average number of collisions inside a nucleus, it is clear that the values determined above are not acceptable.

ulation of the probability of the number of collisions in homogeneous nuclear matter certainly gives results which are too large ⁽²⁴⁾.

The result of this calculation is given by curve *C* of fig. 4. It will be seen that even with the extreme assumptions discussed above, the behaviour of the curve for low multiplicities is very different from the experimental one. If the normalization is carried out as indicated in the preceding section, then curve *C* must be lowered by a factor of more than 3, and this makes the disagreement worse. We have not taken account of fluctuations, but we do not think that to do so would make things appreciably better, as these affect only the number of collisions in the case of pure plural production.

The curve we have obtained behaves similarly to that of HEITLER and JÁNOSSY ⁽¹⁶⁾ who used a substantially different scheme of analysis, and so we conclude that it seems unlikely that any treatment using the plural theory, with or without a cascade inside the nucleus, will be able to explain the behaviour of the experimental distribution.

It is worth noting, at this point, that our conclusions are not in contradiction with the comparison made by the Bristol group for low energy showers ⁽¹⁰⁾. It is clear that for low energies, where the multiplicity is in any case very limited, the differences between the various theories tend to disappear. In the work quoted, there is used the formula for an infinite thickness of nuclear matter ⁽²⁵⁾, which obviously tends to increase the multiplicity. This approximation may have no effect for low energies, but in the case which we are considering it is certainly inadmissible.

7. — Comparison with the theory of Fermi.

The simplest way to compare the observed multiplicities with those obtained from this theory is to attribute the production of mesons to a single collision which produces them with a mean multiplicity given by an expression of the form of (32) of Fermi's paper ⁽¹⁷⁾. This method, however, gives results which cannot be accepted, as can easily be seen from the fact that in order to produce showers of ≥ 4 mesons it would be necessary to have an energy of the order of 100 GeV, and this is incompatible with the observed frequency of such events, which is 40% of the whole frequency of stars produced by primary particles. Because of this, we have made the calculation on the

⁽²⁴⁾ It is sufficient to point out that for $\xi = 1$ (see Appendix 1) there is a probability of 7% of making 7 or more collisions in a nitrogen nucleus, and of 44% of making 2 or more in a hydrogen nucleus! Naturally, this last probability has not been taken into consideration in the calculation.

⁽²⁵⁾ See the first of the equations (3), on page 420 of the work quoted in ⁽¹⁵⁾.

assumption that there is a cascade inside the nucleus, to which the mesons, as soon as produced, can contribute as well as the nucleons. This has been done for two extreme cases ⁽²⁶⁾:

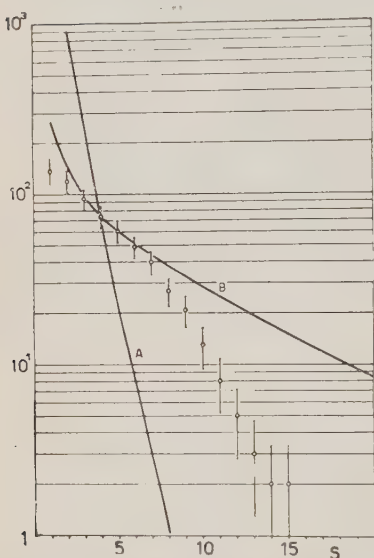
a) on the supposition that the particles emitted in a collision travel inside a cone of such narrow angle that they behave, for successive collisions, as a single «compound particle». This is probably justified for very high energies.

b) in the supposition that the particles produced in each collision are completely independent of each other.

The calculation of the probability for successive collisions is identical with that done for the cascade in the theory of HEITLER and JÁNOSSY (see appendix). In case (a) the «compound particle» is followed on its way through the nucleus: on emergency from it the shower generated is composed of mesons equal in number to those produced in the last collision, and of nucleons equal in number to the total of those coming out from all the various collisions. In case (b), on the other hand, we calculate the number of particles in each generation of the cascade, taking into account the different kinds of collisions concerned, namely nucleon-nucleon and meson-nucleon.

In both cases we obtain a relation between the energy of the primary nucleon and the multiplicity of the shower, and from this, knowing the primary energy spectrum, is obtained the multiplicity distribution of the shower particles.

Fig. 5. — Comparison with the theory of Fermi. Curve A: with compound particle; curve B: with independent particles.



The calculation, which is briefly reproduced in Appendix 2, has given the results of fig. 5. The calculated curves have been normalized at $s = 4$, and from their behaviour it would seem that an assumption intermediate between

⁽²⁶⁾ These calculations are based on an extension of Fermi's theory carried out by E. AMAIDI, L. MEZZETTI and G. STOPPINI. The work is not yet published and has been kindly put at our disposition by the Author.

those of cases (a) and (b) above, would give a good agreement with the experimental curve. But not even the introduction of the nuclear cascade removes the difficulty which arises in the case of the single collision concerning the normalization of the curves to the absolute intensity: for example, even in case (b), which gives the higher multiplicity, the energy corresponding to the creation of a shower of at least four particles in heavy nuclei is of the order of 60 GeV, and particles with this or greater energy account for only 5% of the total intensity. Furthermore, in both cases, the percentage of protons among the shower particles is much higher than the experimental one.

These disagreements with the Fermi theory can probably be explained in terms of the fluctuations in the number of mesons produced in each collision. We have made a preliminary calculation, using the curves of HABER-SHAIM⁽²⁷⁾ and assuming a single collision, of the ratio between the number of primary produced stars of ≥ 4 shower particles and the total number of such stars. The result of this calculation is the value 19%, which is at least encouraging, and gives reason to hope that a more complete calculation, taking account also of the cascade (in which case it would be necessary to know not only the probabilities for the various multiplicities but also the distribution in energy of the mesons produced), could give more satisfactory results than those we ourselves have obtained.

8. — Development of the nucleon component in the atmosphere.

The most obvious fact which emerges from the comparison of the curves *A* and *B* of fig. 2 is their parallelism for $s \geq 5$. This shows that above a certain energy (that is, energy for which there is a large probability of the creation of stars with $s \geq 5$) the energy spectrum of the nucleonic component at 3500 m, is, if not equal, at any rate very similar to that of the primary protons. It must be noted that in this part of the spectrum the contribution from neutrons changes very strongly with altitude: for $t = 680$ g/cm² the value of n/p is 0.62 ± 0.25 , while for $t \sim 60$ g/cm² it is ≤ 0.1 (in fact, the experimental errors do not exclude the possibility that the curves *n* and *p* of fig. 1 become parallel in the region starting at, say, $s = 5$).

We are thus led to separate, in a phenomenological way, from the nucleonic component, a fraction, which we call « of high energy » in the above sense, and which has the property of conserving, at least approximately, its energy spectrum. We shall indicate with *A* this high energy fraction of the nucleonic component, and with *A_p* and *A_n* respectively, its protonic and neutronic parts.

⁽²⁷⁾ U. HABER-SHAIM: Private communication kindly passed on to us by Prof. E. AMALDI.

Another interesting point concerns the remaining «low-energy» part of the nucleonic component. The comparison of the two curves of fig. 2 shows that at 680 g/cm² only a small fraction of it (of the order of 10%) is due to primary protons, or to secondary particles having the same spectrum as the primaries. A similar fact appears to be true also at high altitudes, as the over analysis of stars obtained at 60 g/cm² shows. At this altitude, in fact, the primaries represent only about 20% of the «low energy» nucleons.

In our attempt to analyse the nucleonic component we are consequently led to separate as a component «*B*» that made up of secondary nucleons of low energy, and as «*B*»-stars those of low multiplicity ($1 < s < 5$) produced by the secondaries *B*.

The multiplicity spectrum of these *B*-stars can be roughly identified at high altitude with that of the neutron stars, and at low altitudes with that obtained by subtracting curve *B* from curve *A* in fig. 2. The two resulting spectra are approximately parallel, and this can be interpreted as an indication that the energy spectrum is conserved even for the *B*-stars.

Summarizing, we have a scheme, certainly somewhat over simplified, of the following nature:

a) The *A*-component, of high energy, conserves approximately its spectrum. This component is made up of primary protons, and a certain number of secondaries which increases rather slowly, as the behaviour of the ratio A_n/A_p shows. In fact, at 60 g/cm² the ratio is still < 0.1 , while at 680 g/cm² equilibrium is probably still not reached.

The absorption length of the *A*-component, deduced from the absolute intensities at the two altitudes, is 108 ± 5 g/cm². The error given is purely statistical, and takes no account of systematic errors. It has consequently a somewhat limited value, since when dealing with absolute intensities the differences of methods used in the various laboratories can have an appreciable effect.

b) In collisions with the air-nuclei the *A*-nucleons, apart from producing secondaries (of high energy) which «conserve the spectrum», that is remain as part of the *A*-component, produce nucleons of strongly degraded energy, which form a *B*-component having a much steeper spectrum. Naturally, the *B*-component can contain low energy nucleons created either directly by the *A*-nucleons, or by other *B*-nucleons.

As our curves show, at 60 g/cm² the *B*-nucleons are already more numerous than the *A*-nucleons (which at that height can be practically identified with the primary protons). This means that the generation of secondary *B*-nucleons is much more intense than the generation of secondary *A*-nucleons, and their increase much more rapid. In fact, at 60 g/cm² conditions are almost the same as at 680 g/cm². Unfortunately, however, we cannot draw from this

fact all the conclusions which at first sight might seem possible, because an important fraction of the B -nucleons at high altitudes is certainly due to evaporation in flight of the heavy nuclei and α -particles which make a part of the primary radiation. A rough calculation shows that this contribution is of the same order of magnitude as the effect itself, so that the large uncertainty ⁽²⁸⁾ in our knowledge of the primary α -particles renders equally uncertain the interpretation of the rapid increase of the B -component from the top of the atmosphere to high altitudes.

The picture so obtained, although purely qualitative, has in our opinion, a certain value, which we discuss in the conclusion. All the same, it would certainly be important to give it a quantitative interpretation, and this would require, on the one hand much more experimental data, and on the other the use of a theory of nucleon-nucleon and nucleon-nucleus interaction rather more secure than those at present existing.

As things are, however, we have limited ourselves to making two simplified mathematical treatments of the problem, for two extreme cases which lend themselves to a particularly simple schematisation.

The hypotheses common to both attempts are:

a) That each of the A and B -components conserves its own energy spectrum.

b) That the angular dispersion of the particles can be neglected (purely vertical diffusion).

The two schemes differ however, in the third hypothesis

c) which refers to the type of interaction adopted.

— scheme H. (c). — The interaction takes place according to the theory of Heisenberg ⁽¹³⁾, and secondary collisions inside the same nucleus can be neglected (pure multiple production).

— scheme H.J. (c'). — The interaction is according to the original theory of Heitler and Jánossy ⁽¹⁴⁻¹⁵⁾: the primary, in traversing the nucleus, generates a number of mesons in as many collisions, and also recoil nucleons of low energy, conserving on the average an appreciable fraction of its original energy, on leaving the nucleus. (plural production without cascade).

The details of the calculation are in the Appendix, and here we give only the results.

Scheme H. — In this scheme, the two colliding nucleons remain after the collision with almost no energy, in the centre of mass system. The energy spectrum of the secondaries is not the same as that of the primaries, and a

⁽²⁸⁾ G. SEGRÈ: *Nuovo Cimento*, **9**, 116 (1952).

simple calculation shows that if the latter is of the form $W^{-\gamma}$ (integral spectrum), the secondary spectrum is of the form $W^{-2\gamma}$. For $\gamma = 1.1$, $2\gamma = 2.2$ one finds, with Heisenberg's theory, a multiplicity spectrum for shower particles not unlike the experimental spectrum for the B -component (v. fig. 3, curve B).

On the other hand it is not in any way possible to explain the presence of the A_π -component, that is of the secondaries which conserve the spectrum. To do this it is necessary to make the additional hypothesis that at least a fraction of the collisions occur without any great degradation of energy. The most simple scheme is obtained supposing that, as well as collisions which follow the Heisenberg picture, there are collisions in which only a negligible energy is lost (pure evaporation), but in which there is a certain probability of exchange of charge, that is the transformation of a proton into a neutron and vice-versa.

Putting

$$A = \text{interaction length} = \text{absorption length of the } A\text{-component} = 108 \text{ g/cm}^2,$$

$$A^* = \text{free path for evaporation,}$$

$$A'/0.5 = A^*/\pi \text{ where } \pi \text{ is the probability of exchange in an evaporation, one has clearly}$$

$$A' \geq A^*, \quad \frac{1}{A'} + \frac{1}{A} \leq \frac{1}{A^*} + \frac{1}{A} \leq \frac{1}{A_{\text{geom}}} \sim \frac{1}{65} \text{ cm}^2/\text{g},$$

from which $A' \geq 190 \text{ g/cm}^2$.

One finds

$$(2) \quad \begin{cases} A_p(t) = \frac{1}{2} \exp \left[-\frac{t}{A} \right] \left(1 + \exp \left[-\frac{t}{A'} \right] \right), \\ A_n(t) = \frac{1}{2} \exp \left[-\frac{t}{A} \right] \left(1 - \exp \left[-\frac{t}{A'} \right] \right), \\ B(t) = \frac{2t}{A} \exp \left[-\frac{t}{A} \right], \end{cases}$$

where t is the thickness of atmosphere crossed, in g/cm^2 .

Scheme H.J. - The simultaneous generation of « A -secondaries », which conserve the spectrum, and « B -secondaries », strongly degraded, fits in naturally into this scheme.

We put

$$A = \text{absorption length of the } A\text{-component} = 108 \text{ g/cm}^2,$$

$$A'' = \text{interaction length,}$$

$$A' = \left(\frac{1}{A''} - \frac{1}{A} \right)^{-1},$$

A' may be taken as equal to the geometric free path in air (65 g/cm^2) as the discussion in n. 6 shows.

We find

$$(3) \quad \begin{cases} A_p(t) = \frac{1}{2} \exp \left[-\frac{t}{A} \right] \left(1 + \exp \left[-\frac{t}{A'} \right] \right), \\ A_n(t) = \frac{1}{2} \exp \left[-\frac{t}{A} \right] \left(1 - \exp \left[-\frac{t}{A'} \right] \right), \\ B(t) = \frac{A'}{A} m \exp \left[-\frac{t}{A} \right] \left(1 - \exp \left[-\frac{t}{A'} \right] \right), \end{cases}$$

where m is the mean multiplicity of production of B nucleons during the traversal of an air nucleus.

Comparing (2) and (3) it is seen that both the extreme schemes used predict the same behaviour for the components A_p and A_n , apart from the different physical significance of A' . There is a difference, however, in respect of the B -components. In the scheme H.J. the ratio B/A_n remains constant, and this is evidently due to the fact that both the A_n and B component are generated in the same processes. In the scheme H., however, the ratio B/A_n increases with t .

9. — Absolute intensity of the primary stars.

We wish finally to make a comparison of the intensity of the primary radiation with the number of primary stars observed by us: this is worth doing because of its importance, even if it is not possible yet to draw any definite conclusions from it.

The value of this comparison is limited by a number of reasons mostly due to the scarcity of experimental data. The primary intensity at our latitude may be obtained from the data of SINGER and VAN ALLEN⁽¹⁹⁾: but assuming for the geomagnetic cut off the value in the vertical direction (nor is it necessary to do otherwise) one can make only an approximate evaluation of the actual intensity.

In the second place the total number of primary stars can be obtained only by means of an extrapolation: curve A fig. 2, would indicate that the total number of primary stars (that is for $s \geq 0$) is ~ 160 , corresponding to

$$N_{\text{exper.}} \sim 18 \text{ stars/cm}^2.$$

But this number may be subject to a very appreciable error, both on account of the poor statistics of the data, and of the method itself by which it is obtained.

Finally there is the greatest uncertainty concerning the values of the absorption and interaction lengths to adopt. As in the last section we make the calculation for two cases:

a) assuming a theory similar to that of HEITLER and JÁNOSSY, and therefore taking for the absorption length the experimental value $A_{aa} = 108 \text{ g/cm}^2$, and for the interaction length in emulsion the geometric value $A_{ie} = 28 \text{ cm}$.

b) assuming a theory similar to that of HEISENBERG, with an absorption length in air $A_{aa} = 108 \text{ g/cm}^2$ equal to the interaction length (catastrophic collision), and therefore taking for the interaction length in emulsion the value $A_{ie} = 37 \text{ cm}$ (see Appendix).

We have clearly

$$N = 2\pi I_0 G \left(\frac{t}{A_{aa}} \right) \frac{\tau}{A_{ie}},$$

where N is the number of stars per cm^3 , I_0 the vertical primary intensity at 47° geomagnetic latitude, $t = 60 \text{ g/cm}^2$ is the height of exposure of the plates, $\tau = 7200 \text{ s}$ the time of exposure, and $G(x)$ the Gross factor.

We obtain, in case (*a*)

$$N = 39 \text{ stars/cm}^3,$$

and in case (*b*)

$$N = 29 \text{ stars/cm}^3.$$

In view of what has been said above, the disagreement with the experimental value is not disturbing, but it is important to note that, even if it is entirely attributed to the fact that the curve A obtained by us is incorrect and insufficiently high for low multiplicities, the conclusions reached in the preceding paragraphs would not be sensibly affected.

Conclusions.

Summarising, the most important points which emerge from the present work are:

1) The analysis of the stars found in plates exposed at high altitudes allows us to single out, at any rate roughly, the characteristics of events produced solely by primary protons (as well as those produced solely by primary α -particles).

2) This analysis, together with the fact that the spectrum of the primary protons is approximately known, gives a good mean of testing the various theories, multiple and plural, of meson production.

3) In this way it can be seen that it seems rather difficult to adopt a pure plural theory so as to account for the multiplicity spectrum found. Indeed, it seems probable that the meson production must have a rather high multiplicity even at fairly low energies (of the order of 5 GeV).

4) More exactly, Heisenberg's theory, without the nuclear cascade, gives a multiplicity spectrum qualitatively satisfactory, but it is clear that this is not sufficient to show that the theory itself is substantially correct. And indeed, the assumption of a pure multiple production, without multiplication is in contrast with some known features of the stars in photographic emulsion ⁽²⁹⁾.

5) The theory of Fermi gives *mean* multiplicities too low, at low energies, to explain the experimental multiplicity spectrum. All the same, it cannot be excluded that a calculation which describes correctly the cascade inside the nucleus and takes account of fluctuations would not give results in agreement with experiment.

6) The nucleonic component in the atmosphere can be roughly divided into two parts, which we have called *A* and *B*. The « *A*-component », of high energy, which at the top of the atmosphere coincides with the primary proton component, *conserves approximately its spectrum*. This *A*-component has an absorption length of ~ 110 g/cm², and in it the ratio neutrons/protons increases rather slowly with increase of thickness *t* from the top of the atmosphere. It may be necessary to make special hypotheses in order to take this into account in the theory. For example, with the theory of Heisenberg it would be necessary to assume that as well as completely inelastic collisions, there are also elastic or semi-elastic collisions with the possibility of charge exchange.

7) The *B*-component, of low energy, and entirely of secondary origin, seems also approximately to conserve its spectrum. In the high atmosphere it increases very rapidly with increase of *t*, but this in part is due to the contribution made to it by the evaporation in flight of heavy nuclei and primary α -particles.

8) On account of the importance of the above mentioned points, it would be useful, indeed indispensable, to have a more extensive series of experimental data, of the kind used here.

We are glad to acknowledge our appreciation of the many enlightening discussions we have had with Prof. E. AMALDI during the course of this work, and of the helpful criticism offered us by Prof. B. FERRETTI.

The plates used in this research were exposed during a balloon flight organised in collaboration with the Centre de Physique Nucléaire de Bruxelles-

⁽²⁹⁾ Cf. the work quoted in note ⁽¹⁰⁾. The data in our possession confirm this conclusion.

(where they were developed) and with our Institute here. We particularly wish to thank the Directors of these two Institutes, Prof. M. COSYNS and Prof. E. AMALDI for having rendered possible this collaboration, and the staff of the Centre de Physique Nucléaire for their help in the organisation of the balloon flight, and for the friendly welcome accorded to one of us (G.C.) during his stay at Bruxelles. In particular, we are indebted to Dr. C. DILWORTH for developing so carefully the plates.

In addition, we are grateful to the staff of the Aeronautica Militare and particularly to Dr. A. PERSANO for their generous collaboration in the preparation and launching of the balloons.

APPENDIX

1. - Calculation of the collision probabilities.

Let $\sigma = \pi R^2$ be the effective cross section of a nucleon with

$$(1.2) \quad R = \xi \left(\frac{\hbar}{m_{\pi} c} \right),$$

where ξ is a number ~ 1 which we shall determine from a comparison of the interaction length and the geometric path length in air.

The mean free path in nuclear matter is

$$(1.2) \quad \lambda = \frac{1}{\sigma n} = 1.88 \cdot 10^{-13} \xi^{-2} \text{ cm},$$

where n is the number of nucleons per cm^3 in nuclear matter. We shall take λ as the unit of length in nuclear matter.

The probability that a nucleon, crossing a thickness x_0 of homogeneous nuclear matter, undergoes i collisions is

$$(1.3) \quad p_i(x_0) = \frac{x_0^i}{i!} \exp[-x_0].$$

In the case in which, in each collision, there is generated a certain number of *independent particles*, (1.3) represents the weight that must be given to the i -th generation in the calculation of the total number of particles which leave the thickness x_0 . Now we define n_1 , as the number of particles present after the first collision (1st generation), n_2 the number present if *all* the n_1 particles make another collision (2nd generation); and in general n_i the number present in the i -th generation.

We then have that the mean number of particles which actually emerge from the thickness x_0 when there is at least one collision is:

$$(1.4) \quad \bar{n}(w, x_0) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} n_i(w) p_i(x_0)}{\sum_{i=1}^{\infty} p_i(x_0)} = \frac{\sum_{i=1}^{i_{\max}} n_i(w) p_i(x_0)}{1 - p_0(x_0)}.$$

In this expression the dependence of n_i , and hence of n , on the energy of the incident particle is indicated explicitly: i_{\max} represents the maximum number of generations permitted by the energy w and by the process assumed for the productions of new particles (mesons or recoils nucleons).

In a nucleus of atomic weight A and diameter

$$(1.5) \quad z = 2 \frac{R_A}{\lambda} = 1.5 \xi^2 A^{1/3},$$

the thickness crossed will depend on the collision parameter. Averaging over this, the probability of i collisions is

$$(1.6) \quad P_i(z) = \frac{2(i+1)}{z^2} \left[1 - \exp[-z] \left(1 + z + \dots + \frac{z^{i+1}}{(i+1)!} \right) \right],$$

and the average number of particles leaving the nucleus is

$$(1.7) \quad N(w, z) = \sum_{i=1}^{i_{\max}} \frac{n_i(w) P_i(z)}{1 - P_0(z)}.$$

When, as in photographic emulsions, there is a mixture of different nuclei, it is necessary to average P_i over the composition of the mixture. It is necessary to bear in mind, however, that the probability P_0 , or the «transparency», is different for the various nuclei. Averaging then over the effective cross section of the nuclei, we have

$$(1.8) \quad \Pi_i = \frac{\sum_k N_k \sigma_k P_i(z_k)}{\sum_k N_k \sigma_k [1 - P_0(z_k)]},$$

where N_k , σ_k and z_k are respectively the number per cm^3 , the geometric cross-section and the diameter of the nuclei of the k -th kind.

(1.7) now takes the form

$$(1.9) \quad N(w) = \sum_{i=1}^{i_{\max}} n_i(w) \Pi_i.$$

The value of ξ to introduce into (1.1) can be determined from the trans-

parency, with the help of (1.5), (1.6) and the relation

$$(1.10) \quad \frac{A_g}{A_i} = \frac{\sigma_i}{\sigma_g} = 1 - P_0,$$

where A_g and A_i are the geometric and interaction free paths. Assuming for A_i in air the length $A_i \sim 90$ g/cm² given by the absorption of penetrating showers, we find $\xi = 0.73$. We have used this value of ξ in the development of the cascade according to the theory of FERMI (n. 7 and Appendix 2), but in the theory of H.J. we have used the value $\xi = 1$ to favour as much as possible the production of mesons. The complete transparency of the nucleus for the generated mesons has been introduced in this last calculation by attributing to the last generation energetically possible a weight which includes also the weights of the succeeding generations. Table III gives the values which, in the two cases, are obtained for the Π_i in the emulsion.

TABLE III.

	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5	Π_6	Π_7	$\Pi_{>8}$
$\xi = 1$.177 (*)	.145	.151	.137	.115	.105	.062	.109
$\xi = 0.73$.314	.255	.192	.124	.063	.033	.021	—

(*) In the calculation of Π_1 we have taken account, of course, of the probability of collision against hydrogen nuclei.

For the theory according to H., assuming for air $A_i = 108$ g/cm², one finds $\xi = 0.64$ and hence for the emulsion $A_i = 37$ cm.

2. - The theory of Fermi.

a) *Compound particle.* - From calculations of AMALDI relative to the case of the compound particle, we have

$$(2.1) \quad M^{(i)} = 1.34 \xi^{3/4} (k^{(i)})^{3/4} (w_0^{(i)})^{1/2},$$

where

$$(2.2) \quad k^{(i)} = 1 - (i + r) \frac{1 + \varepsilon_0^{(i)}}{w_0^{(i)}},$$

and $\varepsilon_0^{(i)}$ is the real positive root of the equation

$$(2.3) \quad \varepsilon_0^{(i)} = \frac{1}{1.34 \xi^{3/4}} [(w_0^{(i)})^2 - (i + r)(1 + \varepsilon_0^{(i)})w_0^{(i)}]^{1/4}.$$

The symbols have the following meanings:

- $M^{(i)}$ number of mesons produced in the i -th collision.
 ξ ratio between the geometric radius and the radius of the collision volume Ω_0 , not necessarily equal to the ξ defined previously.
 $w_0^{(i)}$ total energy in the centre of mass system of the i -th collision.
 $k^{(i)}$ ratio between the total energy $w^{(i)}$ and the energy actually available for the creation of mesons.
 $i + r$ number of nucleons present in the i -th collision; $r = 1$ or 0 signifies respectively a primary nucleon or meson.
 $\varepsilon_0^{(i)}$ mean energy in the centre of mass system of the particles present after the i -th collision; the energy is supposed equally divided between nucleons and mesons.

One has further

$$(2.4) \quad w_0^{(i)} = \sqrt{2iw + (i-1)^2},$$

where w is the total energy in the laboratory system of the primary particle.

All the energies are expressed in units of the nucleon rest-mass (~ 1 GeV). Assuming for ξ the value 0.73 previously determined we have calculated, for various energies of the incident nucleon between 5 and 1000 GeV, the number of mesons $M^{(i)}$ produced after i collisions. Bearing in mind the neutral mesons and protons, the number of shower particles is

$$s^{(i)} \sim \frac{2}{3} M^{(i)} + \frac{1}{2} N^{(i)},$$

where $N^{(i)}$ is the number of nucleons which have energy sufficient to give minimum tracks. For each value of the energy, the mean number of shower particles produced is obtained from the formula (1.9), using the values of Π_i given by Table III ($\xi = 0.73$). The multiplicity spectrum is then obtained immediately, assuming an energy spectrum $W^{-1.1}$, and the result is given in curve A, fig. 5.

b) Independent particles. — In this calculation of mesons we have assumed $\xi = 1$ in the collision volume, maintaining for the Π_i the values found above.

The preceding expressions (2.1), (2.2), (2.3) and (2.4) are used putting $i = 1$: the mean energy of the particles produced in the laboratory system is

$$(2.5) \quad \bar{\varepsilon} = \frac{1}{2.68} k^{1/4} w_0^{3/2}.$$

In this way the number and energy of the particles produced in the first collision (first generation) can be calculated, and from this one can pass to the second generation, and so on.

In the development of the cascade we have stopped at the energies for which there is no longer production of mesons or nucleons at minimum ionisation.

Taking into account neutral particles, we have calculated the $n_i(w)$ for various values of the energy, and then, with the help of (1.9), the relation between the energy and the mean number of shower particles, from which the multiplicity spectrum is obtained (curve *B*, fig. 5).

3. - Development of the nucleonic component.

With the symbols used in n. 8, we have for a vertical theory

$$(3.1) \quad A(t) = A_p(t) + A_n(t) = \exp \left[-\frac{t}{A} \right].$$

We put

$$(3.2) \quad A_n(t) = k(t)A(t), \quad A_p(t) = [1 - k(t)]A(t).$$

Scheme H. - We have

$$(3.3) \quad dA_n = -A_n \frac{dt}{A} + A_p \frac{dt}{2A'} - A_n \frac{dt}{2A'}.$$

In the right hand side of this equation the first term corresponds to the absorption, in processes which give *B*-nucleons, and the other two terms to charge exchange. Substituting in (3.3) A_n and A_p given by (3.2) and using (3.1), one finds

$$k(t) = \frac{1}{2} \left[1 - \exp \left(-\frac{t}{A'} \right) \right],$$

remembering that $k(0)$ must equal 0. Using (3.1) and (3.2) there follow immediately the first two equations (2).

Consider now $B(t)$. This component is generated by A with free path A , and at the rate of two nucleons at a time. Assuming that the collision cross-section for *B* is the same as for *A*, and that it corresponds likewise to a catastrophic collision we find

$$(3.4) \quad dB = 2A \frac{dt}{A} - B \frac{dt}{A},$$

from which by integration, we get the last equation of (2).

Scheme H.J. - We may assume that a nucleon which undergoes several collisions in a nucleus and emerges with an appreciable fraction of its original energy has a probability $\pi \sim 1/2$ of emerging either as a proton or a neutron. In this case we can take without change the expressions given above in the

scheme H. for the components A_v and A_p . The physical significance of A' is different however: in the previous case A' is the free path for charge exchange (with an elastic or semielastic collision), while in this case

$$(3.5) \quad A' = \left(\frac{1}{A''} - \frac{1}{A} \right)^{-1},$$

is the free path for interaction without absorption, so that A'/A'' represents the mean number of collisions with air nuclei that an A -nucleon makes before being eliminated.

For the B -component, assuming that a low energy nucleon cannot survive more than one collision, we may write

$$(3.6) \quad dB = -B \frac{dt}{A''} + mA \frac{dt}{A''}.$$

Integrating and using (3.5) the last equation of (3) is obtained.

Note added in proof. — Prof. HEITLER kindly communicated to Prof. AMALDI some criticism to our discussion in connection to the plural theory. The geomagnetic cut-off—he says—is completely responsible of the bent of the experimental curve at $s = 5$. So, we could not compare this curve with the results of the plural theory in its original form (¹⁵), not even at low multiplicities (for which the contribution of secondaries is negligible). More precisely, he communicated to us that TERREAX, on the line of his work on the plural production (*Helv. Phys. Acta*, **24**, 511 (1951)), was able to get a theoretical curve (with $E_{\text{cutoff}} = 4$ GeV and $E_{\text{crit}} = 1.3$ GeV) in good agreement with our results.

As far as the stars with $s \geq 2$ are concerned, the data of the Bristol Group (work quoted in (⁹), fig. 2b) allows us to do a simple calculation of the effect of a cut-off at 3 GeV in a primary spectrum of the type $E^{-1.1}$. We find that this effect is to reduce by about 25% the number of these stars ($s \geq 2$). But the difference that we found with the pure plural theory, in its original form, is much bigger (more than a factor 3). That is why we did not find necessary to take account of the geomagnetic cut-off in that comparison.

On the contrary, in our attempt—very rough indeed—to calculate the shower production with full cascade development, we took the cut-off at 3 GeV, the same value used throughout our work. It is true that the results of this calculation depend rather strongly on the «critical energy» E_{crit} for anelastic scattering. The value of 2 GeV which we assumed is perhaps rather high. If one takes the value of 1.3 GeV, suggested by Prof. HEITLER, one certainly obtains better results. It remains however the fact that our scheme exceedingly favours the higher multiplicities.

RIASSUNTO (*)

Le esplosioni nucleari prodotte dalla radiazione cosmica sono state studiate in lastre Ilford G5, di 400 μ di spessore, esposte per circa due ore a circa 60 g/cm² dalla

(*) Traduzione a cura della Redazione.

sommità dell'atmosfera. L'analisi di queste stelle rese possibile di determinare le caratteristiche di eventi prodotti dai soli protoni primari. I nostri rilievi, confrontati con le teorie della produzione dei mesoni, ci portano a concludere che la teoria della generazione plurima non è sufficiente a spiegare i dati sperimentali. Sembra probabile che la produzione dei mesoni abbia una molteplicità abbastanza elevata anche per energie relativamente basse (dell'ordine di 5 GeV). In base al confronto dei nostri dati con quelli di altri autori, riguardanti emulsioni esposte a 3500 m s.l.m., si propone un quadro schematico dello sviluppo della componente nucleonica nell'atmosfera. La frazione di questa componente dotata di alta energia mantiene approssimativamente il suo spettro ed è assorbita da uno spessore di 110 g/cm².

Su di un nuovo fenomeno di interazione fra onde ed elettroni liberi sottoposti al campo magnetico terrestre.

M. CUTOLO

Istituto di Fisica Tecnica dell'Università, Centro Studi di Radiopropagazione - Napoli

(ricevuto il 20 Maggio 1952)

Riassunto. — Si descrive il rilievo sperimentale di un nuovo fenomeno di interazione fra onde ed elettroni liberi sottoposti a campo magnetico costante, che si presenta durante la propagazione nella ionosfera di campi elettromagnetici modulati, la cui frequenza è compresa nella gamma delle frequenze giromagnetiche. Secondo il rilievo, un campo elettromagnetico modulato, la cui frequenza è uguale alla frequenza di rotazione degli elettroni liberi, subisce, nel passaggio attraverso la ionosfera, una diminuzione notevole del suo grado di modulazione per effetto del campo magnetico terrestre. Sembra che la diminuzione sia tanto più sensibile quanto più alta è la frequenza di modulazione dell'onda considerata. Dopo aver avanzato qualche ipotesi sul probabile meccanismo del processo fisico del fenomeno, si mette in evidenza l'importanza che esso presenta dal punto di vista fisico matematico, non solo perchè il fenomeno ci dà un nuovo mezzo d'indagine della struttura chimica ed elettrica del bordo inferiore della ionosfera, ma per il suo notevole interesse nel campo della radiodiffusione e per il fatto che esso conferma in altro modo la non linearità delle equazioni di Maxwell nel caso di mezzi ionizzati magneto-attivi.

Premessa.

Come è noto, sin dal 1925 E. V. APPLETON ha previsto l'influenza del campo magnetico terrestre su la propagazione delle onde elettromagnetiche nella ionosfera.

Prendendo spunto da questa osservazione, NICHOLS e SHELLING hanno elaborato nel 1925 ⁽¹⁾ una teoria, detta teoria magnetoionica, con la quale

⁽¹⁾ H. W. NICHOLS e J. C. SHELLING: *Bell. Syst. Journ.*, **4**, 215 (1925).

spiegano l'azione del campo terrestre sulla propagazione delle onde elettromagnetiche nei mezzi ionizzati magnetoattivi. Tenendo presente nelle equazioni di Maxwell-Hertz la corrente di conduzione dovuta agli ioni presenti nel mezzo, la cui velocità è funzione sia del campo magnetico costante applicato dall'esterno, quanto del campo elettrico dell'onda, l'integrazione di tali equazioni porta a talune importanti conclusioni, quali la scissione dell'onda in due componenti polarizzate circolarmente in senso inverso, la rotazione del piano di polarizzazione, l'espressione della costante dielettrica e la nozione di frequenza giromagnetica (o girofrequenza).

L'esistenza di una frequenza di rotazione degli elettroni per azione del campo magnetico terrestre porta alla conseguenza che quando si propaga nella ionosfera un'onda la cui frequenza è all'incirca uguale alla frequenza giromagnetica locale, per effetto della risonanza si avrà un aumento dell'energia degli elettroni a spese dell'energia dell'onda, per cui questa uscirà dalla ionosfera sensibilmente attenuata.

Grazie pertanto alla teoria magnetoionica è facile prevedere come le onde, la cui frequenza è compresa tra 1300 kHz e un MHz, subiscano un assorbimento notevole durante il loro passaggio nella ionosfera.

Esperimenti condotti dall'autore hanno permesso di mostrare come la ionosfera possa provocare anche una demodulazione delle onde, la cui frequenza è compresa nella gamma intorno alla girofrequenza.

Lo scopo della presente nota è appunto quella di riferire come l'autore è pervenuto al rilievo del fenomeno di demodulazione ionosferica.

Rilievi sperimentali.

Durante le esperienze eseguite in Italia nel maggio del 1948 fu notato, più di una volta, che il grado di modulazione dell'onda emessa dalla Radio Vaticana ricevuta a Torino nell'I.E.N.G.F. era notevolmente inferiore a quello che realmente imprimeva il trasmettitore. La radio Vaticana emetteva sull'onda di m 266 (5 kW) con una frequenza di modulazione da 230 a 400 Hz e con profondità di modulazione all'incirca del 70%. Invece il campo elettromagnetico veniva rilevato a Torino con profondità di modulazione solo del 30-35%.

La constatazione che un'onda elettromagnetica era ricevuta a distanza con un grado di modulazione più basso di quello prodotto dal trasmettitore suscitò sul momento qualche sorpresa. Tuttavia si pensò che era più sicuro prendere, come valore del grado di modulazione del segnale del Vaticano, il 30-35% e cioè il valore letto sull'oscillografo inserito sulla M.F. del ricevitore sito a Torino anziché il valore del 70% che indicava il modulatore del Vaticano.

Ma alcuni mesi dopo, riflettendo di nuovo sulla constatazione di cui si è

parlato dianzi, e pensando che con il 30% di profondità di modulazione dell'onda in partenza dal trasmettitore di Radio Vaticano era impossibile ottenere con una potenza di soli 5 kW una modulazione impressa sull'onda di Taranto di ben 3%, si ebbe il dubbio che effettivamente la modulazione del segnale in partenza dal Vaticano fosse all'incirca del 70% e non del 30%. In altri termini si ebbe l'idea che in sostanza l'onda, nel viaggiare da Roma a Torino, attraverso la ionosfera, avesse perduto una parte della sua modulazione.

Questa idea fu ritenuta possibile per il fatto che l'onda del Vaticano era di m 266 e cioè di pochi percento distante dalla girofrequenza locale.

Nacque così la previsione che l'adozione di un'onda di frequenza portante, presso a poco uguale alle girofrequenze, potesse provocare, da parte della ionosfera, anche una demodulazione. Se la previsione fosse stata veramente esatta, l'esperienza avrebbe dovuto mostrare che, emettendo frequenze portanti variabili intorno alla frequenza giromagnetica e modulate con percentuali rigorosamente fisse su una data frequenza di modulazione, il grado della modulazione del segnale (ricevuto a distanza) dovesse diminuire nel momento in cui la frequenza portante si avvicinasse alla girofrequenza locale.

In base a tale ipotesi furono organizzate nel maggio del 1949 opportune esperienze, per verificare l'ipotesi. Le notevoli fluttuazioni del segnale in arrivo, i fading, le numerose distorsioni del segnale e soprattutto anche la tecnica allora adoperata, impedirono di osservare se il fenomeno sospettato esistesse o meno.

Allo scopo di verificare la previsione sono state eseguite nuove esperienze durante i mesi di maggio, giugno, luglio e agosto del 1950 ⁽²⁾.

Ha funzionato come emittente il pannello di radio Firenze II della R.A.I.. Esso irradiava un'onda portante (3 kW) la cui frequenza variava da 1300 kHz a 1070 kHz (con una legge di variazione di 5 m in 5 m) per passare attraverso la frequenza giromagnetica che per il cielo dell'Italia Centrale a 90 km di altezza dalla superficie terrestre è stimata in 1200 kHz (250 m).

La trasmissione consisteva nell'emissione di linee della durata di cinque minuti per ciascuna frequenza irradiata, modulate con una frequenza costante di modulazione di 230 Hz. Il grado di modulazione è stato sempre dell'80%, salvo l'errore dell'1 o 2%. Allo scopo di verificare la costanza del grado di modulazione è stato collocato nella stazione emittente un oscillografo munito di un'antennina, in modo da captare il segnale irradiato.

Le misure della frequenza della portante, della frequenza di modulazione e soprattutto del grado di modulazione impressi dal trasmettitore sono state effettuate dall'ing. R. DE CRISTOFARO, Capo della Sezione Tecnica di radio Firenze.

⁽²⁾ M. CUTOLO: *Nature*, **167**, 314 (1951).

Il dispositivo per la misura del grado di modulazione del segnale in arrivo era sito nel laboratorio dell'Istituto Elettrotecnico Nazionale « Galileo Ferraris » di Torino. Esso era costituito da un ricevitore Safar o da un BC 314 per onde medie, sulla cui media frequenza era inserito un oscillografo. Pertanto su questo oscillografo si aveva l'immagine dell'involuppo, dal quale si deduceva il grado di modulazione del campo elettromagnetico captato.

In generale l'ampiezza dell'involuppo subisce continue variazioni nel tempo. L'adozione di una opportuna scala millimetrata trasparente, disposta su lo stesso schermo dell'oscillografo, ha offerto la possibilità di effettuare misure abbastanza precise delle dimensioni dei massimi e dei minimi dell'involuppo.

Il grado di modulazione veniva quindi valutato mediante il rapporto tra semidifferenza e semisomma delle ampiezze suddette.

Salvo i casi in cui durante i cinque minuti di emissione di una data frequenza (compresa nella gamma 1300 kHz-1070 kHz) l'ampiezza dell'involuppo si manteneva quasi invariata, il numero delle misure si riduceva a poche unità.

Negli altri eventi il numero delle misure oscillava tra cinque e dieci unità e anche molto di più. La media di queste misure rappresentava il grado di

modulazione più probabile, da attribuire al segnale in arrivo, emesso su una determinata frequenza portante.

Sono state eseguite nel complesso 10 nottate di esperienze.

La fig. 1 mostra chiaramente l'andamento del fenomeno. In essa si vede come al variare della frequenza della portante dell'emittente (sulle ascisse) intorno alla girofrequenza variava il grado di modulazione del segnale captato

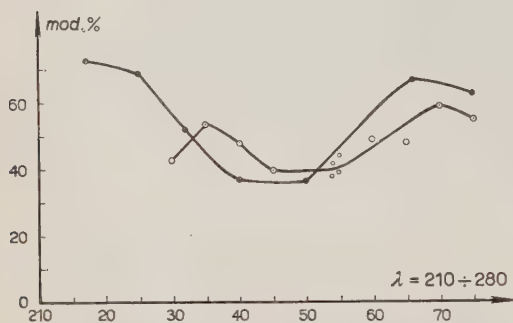


Fig. 1. - Variazione del grado di modulazione (ordinate) del campo in arrivo al variare della frequenza della portante (ascisse).

a Torino. Ciascun punto della curva rappresenta, come è stato detto dianzi, la media di più misure.

Osservando i diagrammi della figura si nota come il minimo del grado di modulazione si ottiene all'incirca sulla frequenza giromagnetica con piccoli spostamenti dovuti probabilmente alla fluttuazione della densità elettronica della ionosfera. Come si vede ancora dai diagrammi, il minimo della percentuale di modulazione del segnale ricevuto a Torino raggiunge il 37%, laddove, come è stato detto dianzi, il grado di modulazione dell'onda in partenza era dell'80%. Non è stato possibile (per la presenza di una radio diffondente che emette

proprio su questa frequenza) misurare esattamente la frequenza sulla quale si ha il minimo, il quale è spostato su valori più alti o più bassi della girofrequenza teorica. Sembra tuttavia che il minimo si sposti su frequenze più basse della girofrequenza.

Allo scopo di dare una idea della fluttuazione delle varie percentuali di modulazione rilevate nelle esperienze, tabelliamo qui i dati ricavati durante la notte del 7 giugno 1950 e di cui è riportato il grafico in fig. 1.

TABELLA I

λ	Ore	Misure di grado di modulazione in %						Media
275	00.46	36.5	58	51	50	—	—	48.75
270	01.09	46	75	49	56	65	—	58.2
275	01.20	49	60	53	—	—	—	54.0
265	01.29	38	51	42.8	58	—	—	47.5
260	01.39	55.5	50	44	59	33.3	—	48.2
255	02.02	35	31	65	—	—	—	43.6
255	03.06	38	39	—	—	—	—	38.5
254	03.10	40	46	37	—	—	—	41.0
254	03.13	37.9	—	—	—	—	—	37.9
245	03.30	39	—	—	—	—	—	39.0
240	03.35	45	48	50	—	—	—	47.6
235	03.40	55	54	51	—	—	—	53.0
230	03.45	36	49	42	35	49	—	42.2
225	03.55	50	—	—	—	—	—	50.0

Le esperienze di cui a fig. 1 presentarono una certa difficoltà, per la presenza di frequenti disturbi atmosferici. Per questo motivo e anche per le frequenti distorsioni della forma dell'involuppo dovute con buona probabilità alle condizioni ionosferiche, la raccolta dei valori misurati non risulta omogenea. Evidentemente, allo scopo di effettuare misure più approssimate, si è cercato di prendere i rilievi negli istanti più favorevoli e di maggiore regolarità della curva involuppo. Tenendo conto degli errori probabili commessi nella lettura del regolo alle varie frequenze esplorate, l'errore globale si deve prudenzialmente assumere intorno al 10%.

Contemporaneamente alle misure eseguite dal sottoscritto a Torino, presso l'Istituto Elettrotecnico Nazionale, sono stati effettuati rilievi anche a Napoli nel laboratorio del Centro Studi, servendosi di un sistema identico a quello adoperato a Torino.

I risultati ottenuti confermano l'esistenza del fenomeno della diminuzione del grado di modulazione provocato dalla ionosfera su di un campo elettromagnetico modulato la cui frequenza portante è quasi uguale alla girofrequenza locale (diagrammi non riportati perchè analoghi a quelli di fig. 1).

Osservando la fig. 1 si vede che i diagrammi si presentano come curve di risonanza invertite con il minimo sulla frequenza giromagnetica. Inoltre si nota che la curva interpretante i risultati del giorno 7 giugno 1950 è fatta nuovamente volgere verso il basso sotto 235 m e che ambedue le curve accennano lo stesso andamento sopra 265 m. Il motivo di questo andamento si deve attribuire al confronto effettuato tra i risultati ottenuti a Torino e quelli avuti contemporaneamente a Napoli. Poichè le condizioni delle esperienze per Napoli furono più favorevoli, si poterono eseguire un numero più elevato di misure, per cui fu più facile approssimare il valore da attribuire a ciascun punto della curva. In tale modo non fu difficile osservare che l'andamento delle curve era all'incirca quello di fig. 1. Da qui si deduce che analogo andamento doveva attribuirsi anche a quello delle curve interpretanti i risultati dei rilievi eseguiti a Torino.

Purtroppo l'impossibilità di aumentare per la notte del 30 maggio 1950 la gamma di esplorazione del pannello di Firenze impedì di osservare l'andamento completo del fenomeno.

Ulteriori esperimenti potranno chiarire la più esatta interpretazione da attribuire alle deduzioni qui avanzate.

Durante il periodo compreso tra la fine di ottobre e la prima settimana del dicembre 1951 è stata compiuta una nuova serie di esperienze. Mentre l'emittente fu ancora il pannello di radio Firenze II, l'apparecchiatura di misura fu invece collocata a Napoli. Pur essendo identica la tecnica di misura, fu adoperato un ricevitore supereterodina appositamente costruito per il rilievo

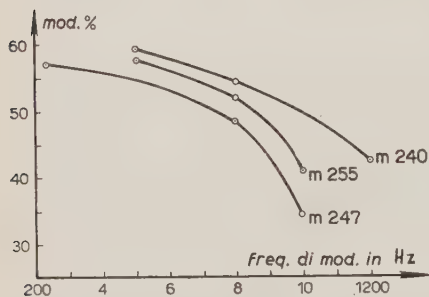


Fig. 2. - Variazione del grado di modulazione (ordinate) del campo in arrivo al variare della frequenza di modulazione (ascisse) del trasmettitore.

ghe sulle onde di m 240, 247 e 255 e con frequenze di modulazione di 230 Hz, 500 Hz, 800 Hz, 1000 Hz, 1200 Hz per ciascuna delle onde emesse. La scelta di queste lunghezze d'onda fu stabilita per studiare il fe-

della demodulazione ionosferica. Le ore prescelte per questa serie di esperienze furono quelle comprese nel tempo tra le 01.54 e le 03.15 del T.M.E.C. Durante queste prove fu adoperato il metodo fotografico. Particolare importanza ha rivestito lo studio dell'andamento del fenomeno con la frequenza di modulazione per onde di frequenza vicino alla girofrequenza locale.

Durante la notte dell'8 dicembre radio Firenze II eseguì tra le ore 02.00 e le ore 03.30 del T.M.E.C. alcune particolari trasmissioni, consistenti nell'emissione di linee lun-

nomeno della demodulazione ionosferica con frequenze portanti i cui valori variavano intorno alla girofrequenza locale. Durante queste trasmissioni furono effettuate a Napoli 70 registrazioni fotografiche. Le esperienze ebbero esito positivo e mostrarono come all'aumentare della frequenza di modulazione per una determinata frequenza portante il grado di modulazione del segnale in arrivo diminuisce. La fig. 2 indica l'andamento del fenomeno. Ciascun punto segnato di fig. 2 è la media di più rilievi effettuati, come si rileva dalla tabella II. In essa si osserva come per l'onda di m 247, onda la cui frequenza è più vicina alla girofrequenza teorica (m 250), il grado di modulazione è più basso di quello delle onde di m 240 e 255. La tabella II riporta i valori delle percentuali dedotti (con lo stesso metodo dell'involuppo) dagli oscillogrammi ripresi fotograficamente a Napoli.

Osservando i vari fotogrammi si notano delle notevoli distorsioni della traccia oscillografica. Così anche è degna di rilievo (vedi tabella II) la variazione del grado di modulazione, variazione che oscilla da un grado di modulazione del 22% a quello superiore all'80% e persino sopramodulato per ciascuna frequenza di modulazione della lunghezza d'onda irradiata.

TABELLA II.

λ	Misure di grado di modulazione in %						Frequenza di modulaz.	Media
m 240	68	82.4	49	61.4	—	—	500 Hz	59.4
	44.7	59	47.5	—	—	—	800 Hz	50.4
	53.15	30.4	34.3	62	—	—	1200 Hz	42.2
m 247	46.3	68.4	—	—	—	—	230 Hz	57.3
	51.6	48.6	46.3	—	—	—	800 Hz	48.6
	29.6	22	60	33.4	34	28.7	1000 Hz	34.7
m 255	84	65	49.9	53.2	68.8	—	500 Hz	58.05
	68	80.3	40	81.8	39.4	60.3	800 Hz	52.1
	40.8	38.1	44.9	66.6	—	—	1000 Hz	41.0

Esperienze condotte nel giugno 1951 con lo stesso pannello trasmettente di Firenze e con l'apparecchiatura di misura collocata a Torino hanno confermato l'esistenza del fenomeno. Notevole precisione della misura della percentuale di modulazione si è ottenuta questa volta servendosi del metodo fotografico.

La fig. 3 riproduce alcuni oscillogrammi ripresi durante le prove del 1951.

Allo scopo di eliminare qualsiasi dubbio, circa l'influenza degli apparati sul fenomeno, sono stati eseguiti dall'ing. DE CRISTOFARO ed all'Autore rigorosi controlli del funzionamento della stazione di Firenze. Nell'intento di poter effettuare rilievi più sicuri del grado di modulazione del segnale in arrivo, è

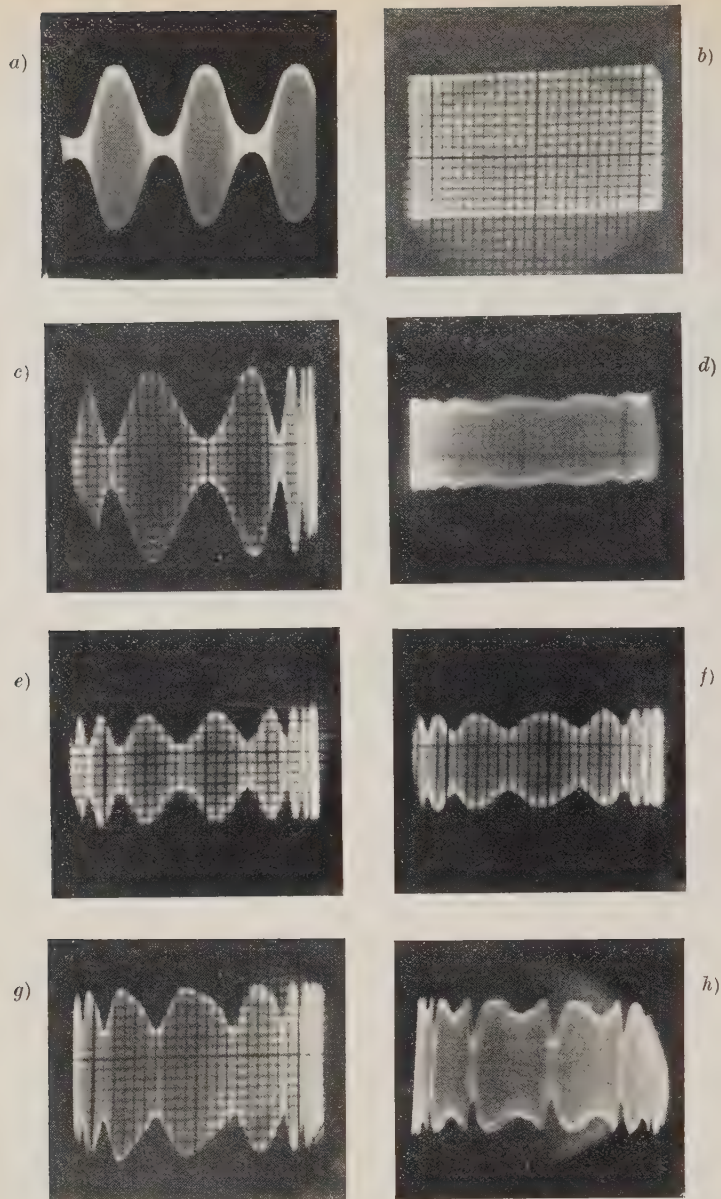


Fig. 3. - a) Traccia oscillografica della portante modulata emessa nella stazione trasmittente di Firenze. - b) Traccia oscillografica registrata a Torino della portante emessa a Firenze senza modulazione. - c), d), e), f), g), h) Differenti aspetti delle tracce oscillografiche delle onde modulate ricevute a Torino come conseguenza del fenomeno dell'autodemodulazione. Notisi il differente grado di modulazione e le diverse distorsioni dovute alla ionosfera.

stato costruito nel laboratorio di Napoli un ricevitore con opportuni accorgimenti, che hanno permesso di ridurre al minimo possibile le variazioni del grado di modulazione del segnale in arrivo da parte dell'apparato stesso.

Per raggiungere lo scopo si sono adoperate bobine in A.F. senza nucleo di ferro. Si è amplificato il segnale soltanto in M.F. adoperando un amplificatore aperiodico come primo stadio e due amplificatori accordati come secondo e terzo stadio. È stato particolarmente curato l'accoppiamento in aria tra l'oscillatore in A.F. e il primo stadio amplificatore in M.F.

Discussione.

Dall'esame dei diagrammi di fig. 1 e 2 si può concludere che effettivamente esiste un fenomeno di demodulazione ionosferica per le onde la cui frequenza è poco distante dalla girofrequenza locale. Un'altra conferma dell'evidenza del fenomeno è data dalla fig. 2, dove si vede come al variare della frequenza di modulazione la diminuzione del grado di modulazione di un campo elettromagnetico in arrivo è maggiore per le onde la cui frequenza dista poco dalla girofrequenza. Il problema si può così schematizzare.

Si abbia un mezzo ionizzato (costituito in gran parte da elettroni) sottoposto a un campo magnetico esterno costante. Se un'onda elettromagnetica modulata la cui frequenza portante è uguale alla frequenza di rotazione degli elettroni prodotta dal campo magnetico traversa il mezzo, l'onda non solo esce attenuata dal mezzo ma ha un grado di modulazione notevolmente inferiore a quello con cui aveva inciso sul mezzo.

Secondo la teoria enunciata nel 1934 da V. A. BAILEY e D. F. MARTYN, la causa dell'interazione di due onde nella ionosfera (e cioè un mezzo ionizzato sottoposto al campo magnetico terrestre) è dovuta alla variazione subita dal coefficiente di assorbimento del mezzo per effetto della variazione del numero di urti al secondo fra elettroni e molecole neutre provocato dai campi elettrici delle onde ⁽³⁾.

Seguendo lo schema del meccanismo dell'interazione di due onde si pensa che nel caso di un'onda sola la demodulazione sia dovuta alla presenza di elettroni ovvero che si tratti di una interazione tra onde ed elettroni per effetto del campo magnetico terrestre. Pertanto al fenomeno, per il quale un'onda di frequenza poco distante dalla girofrequenza, passando attraverso la ionosfera, perde una parte della sua modulazione ovvero « intera se stessa », può essere dato, almeno sul momento, il nome di *selfinterazione* o meglio di *self-giointerazione* (autogiointerazione) oppure di *autodemodulazione* o infine di *girodemodulazione*.

(3) V. A. BAILEY e D. F. MARTYN: *Phil. Mag.*, **18**, 369 (1934).

Dopo l'accertamento che il fenomeno non è influenzato che in piccolissima parte dagli organi ricevitori adoperati (ricevitore) in quanto i ricevitori adoperati sono stati diversi e controllati rigorosamente prima e dopo le esperienze, resta da vedere se le variazioni del grado di modulazione nella propagazione possono essere anche causati da interferenze tra onde, che hanno compiuto percorsi di differente lunghezza. La considerazione che il minimo del grado di modulazione dell'onda in arrivo si sposta con l'ora notturna (e cioè in conseguenza dello spostamento della girofrequenza come hanno mostrato le esperienze di girointerazione) e che l'andamento del fenomeno è indipendente dalla distanza tra l'emittente di Firenze e le stazioni di ricezione, site in diverse località (Napoli e Torino), confermano che la causa del fenomeno è dovuta a un effetto giromagnetico.

Il processo fisico al quale si deve la demodulazione ionosferica non è ancora conosciuto. Un primo tentativo di spiegazione è stato fatto da M. VALLI e da M. CARLEVARO. Secondo questi studiosi il fenomeno sarebbe dovuto alla variabilità del parametro γ che rappresenta la conduttività equivalente del mezzo ionizzato. L'entità della demodulazione dipenderebbe ovviamente dalla curvatura della caratteristica del mezzo, cioè da $d\gamma/d\varepsilon$, dove ε è il campo elettrico dell'onda.

Durante le esperienze eseguite nel novembre e dicembre 1950 e giugno 1951 è stato notato sempre che se il campo elettromagnetico emesso a Firenze non era modulato, la portante che si vedeva sull'oscillografo di Torino (o Napoli) subiva nel tempo piccole variazioni d'intensità. Non appena veniva effettuata a Firenze la modulazione dell'onda, si osservavano a Torino (o a Napoli) notevoli variazioni nel tempo dell'ampiezza dell'oscillogramma tanto che la percentuale di modulazione subiva spesso variazioni estendentisi dal 10% alla sopramodulazione e notevoli distorsioni della forma dell'onda.

Da quanto si è detto dianzi e da quel che si è aggiunto nel periodo precedente, si deduce che il fenomeno dell'autodemodulazione è dovuto alla non linearità dello strato E. D'altronde l'effetto Lussemburgo e la girointerazione mostrano come la ionosfera, o per lo meno lo strato E, è effettivamente un mezzo non lineare.

Non è improbabile che per interpretare il meccanismo dell'autodemodulazione possa essere utile la teoria ereditaria dell'effetto Lussemburgo elaborata nel 1934 da D. GRAFFI⁽⁴⁾. Secondo il GRAFFI l'esistenza dell'effetto obbliga a ritenere che nel caso del mezzo ionizzato rappresentato dalla ionosfera, le equazioni dell'elettromagnetismo non sono lineari. Occorre perciò scrivere l'equazione di Maxwell in forma non lineare. La difficoltà di rendere non lineari le equazioni è stata superata brillantemente mediante la teoria ereditaria con

(4) D. GRAFFI: *Rendiconti del Sem. Mat. di Padova*, gennaio-giugno 1936.

termini non lineari. Si ha così

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \lambda \bar{F} \int_{t-h}^t \alpha(t, r) \mathbf{F}(r) dr + \mathbf{V} + u_0 ; \quad \operatorname{rot} \mathbf{F} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} .$$

Dove \mathbf{F} ed \mathbf{H} sono il campo elettrico e magnetico, u_0 la corrente nelle antenne, ε la costante dielettrica, μ la permeabilità magnetica, $\alpha(t, r)$ e λ due coefficienti il cui significato è stabilito nel lavoro citato (⁴). Il termine non lineare è rappresentato da \mathbf{V} .

Sembra probabile che servendosi di queste equazioni si possa interpretare l'autodemodulazione.

Conclusione.

Il rilievo del fenomeno, di cui si è parlato nella presente nota, non solo presenta un notevole interesse dal punto di vista fisico matematico perchè esso conferma ancora una volta la non linearità della ionosfera, ma offre un nuovo potente mezzo d'indagine delle proprietà chimiche ed elettriche dello strato E.

Dal punto di vista della radiodiffusione il fenomeno deve essere preso in attento esame. Sembra infatti che i rilievi di cui si è discusso nella presente nota abbiano permesso di scoprire una delle cause principali che influenzano notevolmente la propagazione delle onde medie. Osservando i diagrammi delle fig. 1 e 2 vien fatto di pensare che nel decidere le frequenze da adoperare in radiodiffusione occorre scartare per ciascun paese la gamma di frequenze che distano una quarantina di metri dalla girofrequenza locale.

Hanno collaborato attivamente alle esperienze, oltre l'ing. R. DE CRISTOFARO, l'assistente tecnico D. MERCOGLIANO, l'ing. M. CARLEVARO, l'ing. G. COLONNESE, il maresciallo R.T. C. GAROFALO e il sig. E. NARCISO.

Si ringraziano i proff. E. CARLEVARO e A. PINCIROLI per aver fornito mezzi e dispositivi di misura e la Radio Italiana, in particolare l'ing. G. CASTELNUOVO, per aver messo a disposizione Radio Firenze II, tecnici e cavi telefonici, e il sig. TIRINNANZI per le trasmissioni.

Si è vivamente grati ai proff. G. VALLAURI e M. BOELLA per le utili discussioni epistolari sull'argomento.

SUMMARY

During the experiments on gyrointeraction made in Italy during May-June 1948 we often observed that the modulation percentage of the station Radio Vatican, (emitting on 266 m with a power of 5 kW and about 70 per cent carrier modulation) was received at Turin (with a receiver tuned to 266 m) with 30-35 per cent modulation frequency 230 or 450 Hz). This result caused some surprise; some time later we thought that it was a phenomenon due the absorption of energy by the ionosphere, particularly at a frequency which was near the local gyrofrequency. We therefore supposed that, by varying the frequency of a transmitted wave around the local gyrofrequency, we should obtain a decrease in the modulation percentage after passage in the ionosphere. Observation of the phenomenon was first attempted in 1949, with negative results. During May-August 1950, new experiments were made in order to examine experimentally the prediction: Radio Florence II was used as transmitter, and, modulated 80 per cent at 230 Hz, the carrier wave-length was varied step by step within the range 215-280 m so as to include the local gyrofrequency, estimated as 1200 kHz (250 m). The receiving station at the Istituto Elettrotecnico Nazionale « Galileo Ferraris », Turin, consisted of a « Safar » receiver tuned to Radio Florence II, with its intermediate-frequency output coupled to an oscillograph. The envelope of the oscillograph trace gave a measure of the modulation percentage. Fig. 1 is typical of a number of graphs that were obtained, and shows, as the frequency was varied around the gyromagnetic frequency, how the modulation percentage of the received radiation decreased to a minimum of less than 40 per cent as compared with the 80 per cent of the original transmission, the whole curve giving the appearance of an inverted resonance curve with a minimum near the gyrofrequency. It has not been possible, for technical reasons, to measure exactly the frequency on which the minimum is obtained, and then find whether, because of the ionospheric conditions, the values are higher or lower than the theoretically calculated gyrofrequency. It seems probable that the minimum is at the lowest night frequency. Measurements were carried out at the same time in Naples to confirm the existence of the phenomenon, and similar results were obtained. New experiments made in the autumn of 1950 show that, using a carrier near the gyrofrequency, the percentage modulation of the received wave decreases according to the increase of modulation frequency. Fig. 2 shows results of the reception at Naples of radiation of wave-length 240, 247 and 255 m, respectively, all of which were originally modulated 80 per cent. In both the figures, every point is the mean value of many experiments. We propose that this phenomenon of a wave, with frequency near the gyrofrequency passing through the ionosphere and losing a part of its modulation (that is, interacting on itself), should be given the name of « self-interaction » or better still, « self-gyrointeraction », or « selfdemodulation » or « gyrodemodulation ». Particularly interesting is the technique adopted to make the phenomenon evident. Fig. 3 a) shows the oscillograph trace of modulated wave seen in the sender of Florence; fig. 3 b) shows the oscillograph trace of the carrier emitted in Florence without modulation, received in Turin; fig. 3 c), d), e), f), g), h), show the oscillograph trace of modulation received in Turin with different percentages as results of the phenomenon. Finally we make some remarks on the physical process of the phenomenon, we make evident the importance of selfdemodulation in broadcasting and in the study of electrical and chemical properties of the *E* layer.

On the Raman Spectra of Thianthrene in Various Solutions.

S. K. MUKERJI and BANARSI LAL

Department of Physics, Agra College - Agra (India) ()*

(ricevuto il 21 maggio 1952)

Summary. — The Raman spectra of thianthrene have been studied in solutions of carbon bisulphide, carbon tetrachloride, chloroform and other. A few lines which appeared in the solid state but did not appear in the molten state, have appeared in solutions, and some have undergone changes of intensity in different solutions. The very low frequency lines which appeared in the solid state, have not appeared in the molten state nor in solutions, thus lending support to the view that these lines are due to the oscillations of the lattice. The largest of Raman lines have been observed in carbon bisulphide solution. They are at 158(4), 220(4), 305(4), 380(3), 490(4), 552(4), 592(6), 680(1), 744(4), 1033(10), 1123(10), 1275(6), 1563(8), 2225(4) and 3044(6) cm^{-1} respectively. The results obtained in the various solutions have been compared with one another and also with those already obtained by us in the solid and molten states, and the changes in frequencies in different states have been discussed.

Introduction.

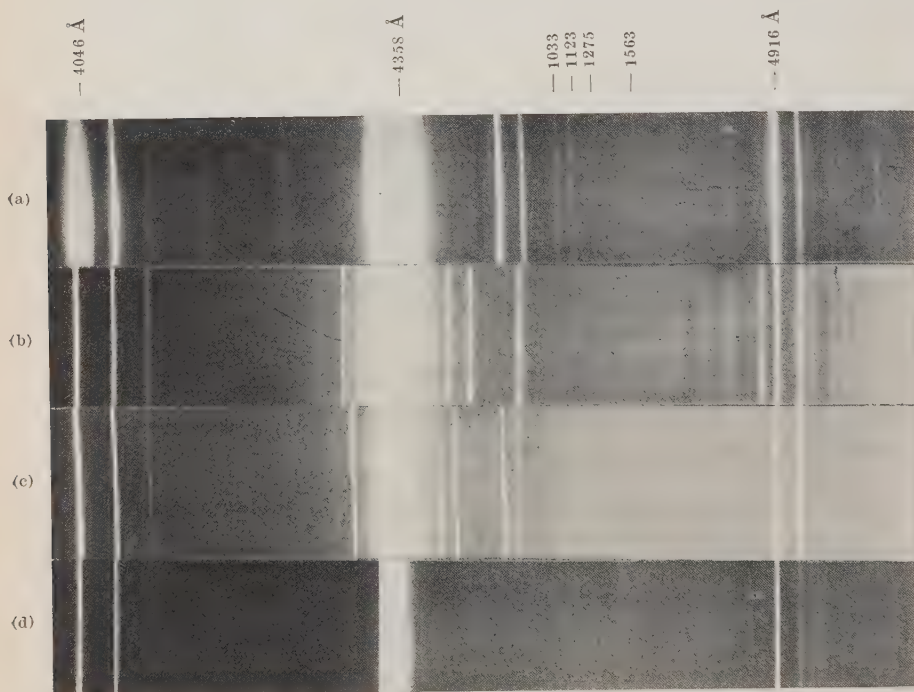
Very little work seems to have been done on the Raman spectra of linear tricyclic compounds. The only reference to the Raman spectra of such compounds appears in the work of MANZONI ANSIDEI (1936). These compounds are highly fluorescent and require special technique in their investigation. This seems to be the reason why they have not been studied in great detail. S. K. MUKERJI and LAKSHMAN SINGH were the first to examine the Raman spectrum of thianthrene in carbon bisulphide solution in this laboratory (results unpublished). Later on RAM SWARUP SINGH, also in this laboratory,

(*) Communicated by Prof. S. K. MUKERJI.

investigated this substance in CS_2 solution and verified some of the results of MUKERJI and L. SINGH. We have already investigated this substance for the first time in the solid and molten states, the results of which have been published (1951). In this investigation we have revised the work of MUKERJI and L. SINGH in CS_2 solution and have also studied its Raman spectra in various other solutions. These results are given in the accompanying table.

Experimental.

Thianthrene, obtained direct from Eastman Kodak Company, America, was further purified by repeated crystallization with extra pure benzene till perfectly colourless and transparent crystals were obtained. The solvents were purified by slow distillation over a water bath heated by an electric heater



Raman Spectra of Thianthrene in

- | | |
|------------------------------------|--------------------------|
| (a) Carbon bisulphide solution, | (c) Chloroform solution, |
| (b) Carbon tetrachloride solution, | (d) Ether solution. |

and only the middle portion of the distillate was taken in the Raman tube. Ether was distilled over hot water and it was freed from traces of alcohol by distilling it over metallic sodium. Due to the high degree of purity of the substance no fluorescence appeared on the plate. If a little fluorescence appeared, it was completely removed by using a filter of concentrated solution of sodium nitrite. Hg λ 4358 was used as the exciting line and a Fuess Glass Spectrograph was used for taking the Raman spectra.

Ilford selochrome plates were used for taking the photographs, and the exposure of about 40 hours were given. The measurements were made by an accurate Zeiss Ikon comparator, and the wavelengths were calculated in the usual manner.

Observations and discussions.

Spectrum in CS₂ solution. — It will be seen from the table that there is no change in the frequency of the two intense lines appearing at 1033(10) and 1123(10) cm⁻¹ respectively as the substance passed from the solid to the molten state and also when it is studied in solution. Since these frequencies have been attributed to the C—S linkage, it is clear that carbon bisulphide as a solvent has no effect on C—S linkage. The frequencies appearing at 1273(4), 1567(8) and 3052(6) cm⁻¹ in the molten state appear at 1275(6), 1563(8) and 3044(6) cm⁻¹ respectively in CS₂ solution. The change in frequency is small and in some cases well within the limits of the experimental error. The maximum change is observed in the C—H frequency which changes from 3052 cm⁻¹ in the molten state to 3044 cm⁻¹ in solution. This shows that the frequency of C—H vibration has diminished in CS₂ solution.

The frequencies at 2225(4), 744(4), 592(6), 552(4), 490(4) and 380(3) cm⁻¹ have been observed in CS₂ solution, though they were not present in the molten state.

The very low frequencies observed at 85 and 62 cm⁻¹ in the solid state are absent in the solution, thus lending support to the view that these frequencies are due to the oscillations of the lattice. As the lattice does neither exist in the molten state nor in solutions, these frequencies are absent.

The frequencies of CS₂ remain unchanged by dissolving thianthrene in it. As carbon bisulphide has zero dipole moment and the symmetrical molecule of thianthrene is also non-polar, the solvent appears to have little influence on the vibrating bonds of the solute.

The number of lines observed in CS₂ solution is the largest, and no fluorescent background has appeared on the plate.

Spectrum in CCl₄ solution. — The frequency 3046 cm⁻¹ is present in CCl₄ solution as well as in other solutions. A Raman line is observed at 2905 cm⁻¹

TABLE. — Raman shifts of Thianthrene in wavenumbers, in different solutions and also in solid and molten states.

No.	In the solid state	In the molten state	In CS ₂ solution	In CCl ₄ solution	In CHCl ₃ solution	In ether solution	In CS ₂ solution by MUKERJI and L. SINGH (unpublished)
1	62(2)	—	—	—	—	—	—
2	85(4)	—	—	—	—	—	—
3	159(4) ±	159(4) ±	158(4) b	153(2)	159(4)	—	159(6 b)
4	241(4)	244(4)	220(4) b	216(6)	—	—	226(3 b)
5	319(4)	305(4)	305(4)	313(6) CCl ₄	335(2)	—	306(6)
6	—	—	380(3)	—	—	—	398(4)
7	—	—	490(4)	—	—	—	487(2)
8	565(5)	—	552(4)	—	—	—	—
9	—	—	592(6)	—	—	—	—
10	650(4)	—	649(20) CS ₂	—	—	—	649(20) CS ₂
11	—	668(3)	680(1)	—	—	—	685
12	—	768(2)	744(4)	—	—	—	—
13	1033(10)	1033(10)	1033(10)	1037(2)	1033(6)	1038(2)	1033(10)
14	1125(10)	1123(10)	1123(10)	1138(2)	1124(4)	1146(2)	1123(10)
15	1275(4)	1273(4)	1275(6)	1283(2)	1249(2)	1280(2)	1278(6)
16	—	—	—	—	—	—	1374(4)
17	1571(4)	1567(8)	1563(8)	1575(1)	1568(4)	—	1565(6)
18	—	—	2225(4)	2228(3)	—	2239(2)	—
19	2462(2)	—	—	2458(2)	—	—	—
20	—	2789(5)	—	—	2716(2)	—	—
21	2912(2)	—	—	2905(1)	—	—	—
22	3044(6)	3052(6)	3044(6)	3046(4)	3051(4)	3042(5)	3046(8)

b = broad and diffused.

which is present at 2912 cm^{-1} in the solid state. The intense lines observed in the solid and molten states at $1123(10)$ and $1033(10)\text{ cm}^{-1}$ respectively are observed at $1138(2)$ and $1037(2)\text{ cm}^{-1}$ as weak lines. The very low frequency oscillations observed at 85 and 62 cm^{-1} in the solid state are not observed in solution.

Spectrum in CHCl_3 solution. — Liquid chloroform gives the frequencies $262(6)$, $365(4)$, $666(4)$, $762(2\text{ bd})$, $773(1)$, $1215(1)$ and $3016(2)\text{ cm}^{-1}$ respectively. In solution all these frequencies have appeared as such except the line at 1215 cm^{-1} which appears at 1206 cm^{-1} in solution. The thianthrene frequency $1275(4)\text{ cm}^{-1}$ undergoes a considerable change and appears at $1249(1)\text{ cm}^{-1}$. The two intense lines of thianthrene, $1125(10)$ and $1033(10)\text{ cm}^{-1}$ respectively, appear at $1124(2)$ and $1033(3)\text{ cm}^{-1}$ in CHCl_3 solution. Low frequency oscillations did not appear in the solution.

Spectrum in Ether solution. — In this solution the thianthrene frequency at $1125(10)\text{ cm}^{-1}$ appears at $1146(1)\text{ cm}^{-1}$ while the frequency at $1033(10)\text{ cm}^{-1}$ appears at $1038(1)\text{ cm}^{-1}$. The former has undergone a considerable change but not the latter. The line at $1571(4)\text{ cm}^{-1}$ is an important frequency of thianthrene. It has appeared in the solid and molten states and in all other solutions except in ether. The low frequency oscillations are absent from all solutions, thereby confirming the view that they are the oscillations of the lattice.

General discussion.

The appearance and disappearance of the vibrational frequencies in solution are due to the formation of new chemical bonds and destruction of the original ones. Sometimes molecular complexes are formed inside the solution and a change in original frequency occurs.

KIRKWOOD and BAUER and MAGAT have developed a theoretical formula for the shift, assuming a simple electrostatic interaction of an oscillating dipole with its surroundings of dielectric constant D . They find that the relative shift should be proportional to $D - 1/2D + 1$. They have verified this formula for HCl in different non-ionising solvents.

Association between dipoles is probably smaller in non-polar solvents, the molecules of which tend to cluster round the individual poles, and thus, prevent them from coming into close contact with those of the neighbouring molecules. Since the electrical charges of a dipole are usually concentrated close to particular atoms, the degree of association will also depend upon the nearness of these atoms to the surface of the molecule. Since the force exerted by a dipole upon a polarizable molecule is inversely proportional to the seventh

power of the distance, the radius of the effective action of a dipolar molecule will not extend beyond its immediate neighbours, and the molecular movement in the liquid will, therefore, tend to break up any large agglomeration of dipolar molecules.

It is for these reasons that the frequency-shifts are different in different solvents as has been observed in these investigations.

REFERENCES

- [1] E. BAUER and M. MAGAT: *Physica*, **5**, 715 (1938).
- [2] J. E. LENNARD-JONES: *Proc. Phys. Soc.*, **43**, 470 (1931).
- [3] S. K. MUKERJI and BANARSI LAL: *Ind. Journ. Phys.*, **7**, 40 (1951).
- [4] S. K. MUKERJI and BANARSI LAL: *Ind. Journ. Phys.* (in the press) (1952).
- [5] W. WEST and R. T. EDWARDS: *Journ. Chem. Phys.*, **5**, 14 (1937).

RIASSUNTO (*)

Si sono studiati gli spettri Raman del tiantrene in soluzioni di solfuro di carbonio, tetracloruro di carbonio, cloroformio ed etere. Alcune linee che apparivano negli spettri della sostanza solida ma non in quelli della sostanza fusa sono apparse negli spettri delle soluzioni, presentando differenze di intensità nelle differenti soluzioni. Le righe di bassissima frequenza che apparivano negli spettri del solido non si sono rilevate nè in quelli della sostanza fusa nè in quelli delle soluzioni, il che conforta l'ipotesi che queste righe siano dovute alle oscillazioni del reticolo. Il numero maggiore di righe Raman furono osservate nello spettro della soluzione in solfuro di carbonio. Esse si trovano a 158(4), 220(4), 305(4), 380(3), 490(4), 552(4), 592(6), 680(1), 744(4), 1033(10), 1123(10), 1275(6), 1563(8), 2225(4) e 3044(6) cm^{-1} rispettivamente. Si confrontano i risultati ottenuti con le varie soluzioni fra di loro e con quelli già ottenuti sperimentando con la sostanza solida e fusa e si discutono le variazioni di frequenza riscontrate nei vari stati.

(*) Traduzione a cura della Redazione.

Representations of the Galilei group.

E. INÖNÜ and E. P. WIGNER

Department of Physics, Princeton University, Princeton N.J. - U.S.A.

(ricevuto il 22 Maggio 1952)

Summary. — While the transition to a moving coordinate system ($x \rightarrow x + vt$, $t \rightarrow t$) commutes in classical mechanics with displacements ($x \rightarrow x + a$, $t \rightarrow t$), the corresponding operations in Schrödinger's non-relativistic wave mechanics do not commute. In fact, the two operations, taken in different orders, differ by a factor $\exp[i m \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} / \hbar]$. The present article considers the possibility of a nonrelativistic wave mechanics in which the transformations of the wave functions obey the same commutation relations as the transformations themselves. It shows that in such a mechanics position and momentum operators can exist only if it is reducible, i.e. only if the set of all states can be decomposed into subsets which are themselves invariant with respect to all permissible transformations of classical mechanics (rotations, displacements, proper Galilei transformations).

Introduction.

It is well known that every relativistically invariant wave equation defines a unitary representation of the inhomogeneous Lorentz group ⁽¹⁾ (also called Poincaré group). It is not true, however, that, conversely, a physically meaningful theory corresponds to every unitary representation of this group. It seems, in fact, that the existence of particles with space-like momentum vectors (case 4 of reference 1, p. 186) would contradict the principle of causality and a system of wave functions which are all individually invariant with respect to displacements (case 3 of reference 1) cannot represent particles.

The purpose of the present article is to investigate the representations of the symmetry group of nonrelativistic mechanics (the Galilei group) and to

⁽¹⁾ E. P. WIGNER: *Ann. of Math.*, **40**, 149 (1939). Actually, as was discussed in this article, the representation need not be a true representation, only a representation up to a factor. This free factor corresponds to the indeterminate phase factor in the wave functions.

ascertain which of these representations may correspond to physically meaningful theories. The answer to this question is obvious for the representations which correspond to Schrödinger's nonrelativistic equation. These representations are again representations up to a factor: although the symmetry transformations which correspond to transition to a moving coordinate system commute with those which correspond to a displacement, the operators $\exp[i\mathbf{mv} \cdot \mathbf{x}/\hbar]$ and $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a}$ which correspond to these symmetry transformations do not commute. Their product, taken in the two different orders, differs by the factor $\exp[i\mathbf{mv} \cdot \mathbf{a}/\hbar]$. Furthermore, V. BARGMANN has shown ⁽²⁾ that these representations are essentially the only «up to a factor» representations. For this reason, the present work will be restricted to the investigation of the true representations of the Galilei group. The next section will be devoted to the description of this group and the determination of its representations. The ensuing section will deal with an attempt to find a physical interpretation to these equations. It will conclude that these representations do not correspond to equations describing particles. The investigation will include a search for states localized at one point, states with definite velocity components in all directions and states with definite velocity in only one direction.

1. - The Galilei group.

A. Definition and Elementary Properties.

The proper Galilei group contains the translations in space and time, the rotations and the transitions to a uniformly moving coordinate system (proper Galilei transformations or accelerations). The general element will be denoted by $G = (\mathbf{a}, b, \mathbf{v}, R)$ where \mathbf{a} represents the space translations $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{a}$, b represents the time translation $t' = t + b$, \mathbf{v} represents the acceleration $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{v}t$ and R represents the rotation $\mathbf{x}' = R\mathbf{x}$. The order of the transformations is from right to left. The relations between the elementary transformations are:

- (1) $(\mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_2) = (\mathbf{a}_2)(\mathbf{a}_1) = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)$
- (2) $(b_1)(b_2) = (b_2)(b_1) = (b_1 + b_2)$
- (3) $(\mathbf{v}_1)(\mathbf{v}_2) = (\mathbf{v}_2)(\mathbf{v}_1) = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$
- (4) $(R_1)(R_2) = (R_1 R_2)$
- (5) $(\mathbf{a})(b) = (b)(\mathbf{a})$

⁽²⁾ Private communication.

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & (\mathbf{a})(\mathbf{v}) = (\mathbf{v})(\mathbf{a}) \\
 (7) \quad & (R)(\mathbf{a}) = (\mathbf{a}')(R) \quad \text{where } \mathbf{a}' = R\mathbf{a} \\
 (8) \quad & (\mathbf{v})(b) = (b)(\mathbf{a})(\mathbf{v}) \quad \text{where } \mathbf{a} = b\mathbf{v} \\
 (9) \quad & (b)(R) = (R)(b) \\
 (10) \quad & (R)(\mathbf{v}) = (\mathbf{v}')(R) \quad \text{where } \mathbf{v}' = R\mathbf{v}.
 \end{aligned}$$

We note the following points:

a) Space and time translations commute among themselves and with each other. The same is true for space translations and accelerations.

b) Accelerations do not commute with time translations. With respect to rotations they behave like space translations.

Using the relations (1)-(10) one easily calculates that the product of two inhomogeneous Galilei transformations

$$(11) \quad (\mathbf{a}_1, b_1, \mathbf{v}_1, R_1)(\mathbf{a}_2, b_2, \mathbf{v}_2, R_2) = (\mathbf{a}, b, \mathbf{v}, R),$$

where

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + b_2\mathbf{v}_1 + R_1\mathbf{a}_2,$$

$$b = b_1 + b_2,$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + R_1\mathbf{v}_2,$$

$$R = R_1R_2.$$

The inverse is

$$(12) \quad (\mathbf{a}, b, \mathbf{v}, R)^{-1} = (R^{-1}(b\mathbf{v} - \mathbf{a}), -b, -R^{-1}\mathbf{v}, R^{-1}),$$

the unit element is $(\mathbf{O}, \mathbf{O}, \mathbf{O}, E)$

B. Determination of the Irreducible Representations.

Let $T(\mathbf{a})$, $\theta(b)$, $G(\mathbf{v})$, $O(R)$ be respectively the operators corresponding to the elementary transformations; then $U(G) = T(\mathbf{a})\theta(b)G(\mathbf{v})O(R)$ corresponds to the general Galilei transformation. If a state is described by a wave function ψ_g in the g frame, operating on ψ_g with any operator, say $T(\mathbf{a})$, results in a function $\psi_{g'}$ which describes the same state in the frame $g' = (\mathbf{a})g$. In other words, an experiment performed on $\psi_{g'}$ at the point \mathbf{x}' , t' will give the same result as one performed on ψ_g at the point \mathbf{x} , t , where $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{a}$ and $t' = t$. We remark here that we shall be using throughout time independent wave functions (Heisenberg representation); these may be considered

to be the values for $t = 0$ of the time-dependent wave functions. The change of the state with time will be described by means of the operator $\theta(b)$. Thus the value of the time-dependent wave function at $t = t_0$ will be given by

$$\psi(t_0) = \theta(-t_0)\psi,$$

(where ψ is the time-independent function) as $\theta(-t_0)$ takes one into a frame with $t' = t - t_0$ and $t' = 0$ corresponds to $t = t_0$.

To form a true representation the operators $U(G)$ must satisfy the relation

$$(13) \quad U(G_1)U(G_2) = U(G_1G_2),$$

where G_1G_2 is given in (11); or since the relations (1)-(10) are equivalent to (11), the elementary operators $T(\mathbf{a})$, $\theta(b)$, $G(\mathbf{v})$ and $O(R)$ must satisfy the relations (1)-(10) with the operators substituted for the corresponding transformations. We shall determine the representations by Frobenius' method which builds up the representations of the whole group out of the representations of an invariant subgroup by means of a «little group». This method was applied previously to the determination of the representations of the inhomogeneous Lorentz group ⁽¹⁾.

For the invariant subgroup we can take either the group of the space and time translations or of the space translations and accelerations. It appears more convenient to use the second. As $T(\mathbf{a})$ and $G(\mathbf{v})$ commute with each other as well as among themselves, it is possible to introduce such a coordinate system in Hilbert space that the wave functions $\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \zeta)$ depend on two vectors \mathbf{p} , \mathbf{q} and a discrete variable ζ and for which

$$(14) \quad T(\mathbf{a})\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \zeta) = \exp[i\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}]\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \zeta),$$

$$(15) \quad G(\mathbf{v})\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \zeta) = \exp[i\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}]\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \zeta).$$

One defines an operator $P(b)$ by

$$(16) \quad P(b)\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \zeta) = \psi(\mathbf{p}, \mathbf{q} - b\mathbf{p}, \zeta).$$

Thus the function $\varphi = P(b)\psi$ has at the point $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \zeta)$ the same value as ψ at the point $(\mathbf{p}, \mathbf{q} - b\mathbf{p}, \zeta)$. We have then

$$G(\mathbf{v})P(b)\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \zeta) = \exp[i\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}]P(b)\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \zeta) = \exp[i\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}]\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q} - b\mathbf{p}, \zeta).$$

One can calculate $P(b)T(b\mathbf{v})G(\mathbf{v})\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \zeta)$ in a similar way and finds

$$(17) \quad G(\mathbf{v})P(b) = P(b)T(b\mathbf{v})G(\mathbf{v}).$$

Together with

$$(18) \quad P(b)^{-1} = P(-b), \quad P(b)T(\mathbf{a}) = T(\mathbf{a})P(b),$$

this shows that $P(b)$ satisfies the same equations which (5), (8) require $\theta(b)$ to satisfy. Hence $\theta(b)P(b)^{-1}$ commutes with all $G(\mathbf{v})$ and $T(\mathbf{a})$ and therefore with any function of \mathbf{q} and \mathbf{p} . One can set therefore

$$(19) \quad \theta(b) = V(b)P(b),$$

where $V(b)$ operates on ζ only, though it may depend on \mathbf{p} and \mathbf{q} ; or

$$(20) \quad \theta(b)\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \zeta) = \sum_{\eta} V(\mathbf{p}, \mathbf{q}, b)_{\zeta\eta} \psi(\mathbf{p}, \mathbf{q} - b\mathbf{p}, \eta).$$

Next we define an operator $Y(R)$ by

$$Y(R)\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \zeta) = \psi(R^{-1}\mathbf{p}, R^{-1}\mathbf{q}, \zeta).$$

A similar argument, using the relations (7) and (10) shows that $O(R)Y(R)^{-1}$ does not operate on \mathbf{p} or \mathbf{q} , so that

$$(21) \quad O(R)\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \zeta) = \sum_{\eta} Z(\mathbf{p}, \mathbf{q}, R)_{\zeta\eta} \psi(R^{-1}\mathbf{p}, R^{-1}\mathbf{q}, \eta).$$

The operators $T(\mathbf{a})$, $\theta(b)$, $G(\mathbf{v})$, $O(R)$ as determined in (14), (15), (20), (21) satisfy all the commutation relations (1)-(10) except (2), (4) and (9). Before determining V and Z on the basis of these relations we determine the variability domain of the vectors \mathbf{p} , \mathbf{q} . This will be different for the different irreducible representations of the Galilei group.

If the $T(\mathbf{a})$, $G(\mathbf{v})$ constituted the whole group, it would be possible to restrict the variability domain of the pair \mathbf{p} , \mathbf{q} to a single point $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$, $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ and the irreducible representations would all become one dimensional. Because of the group elements (R) and (b) this is not possible: (20) and (21) show, that in the representation in which \mathbf{p}_0 , \mathbf{q}_0 are permissible values of the variables, the pairs $R\mathbf{p}_0$, $R\mathbf{q}_0$ and \mathbf{p}_0 , $\mathbf{q}_0 - b\mathbf{p}_0$ are likewise permissible values. This is true for all rotations R and all values of b .

On the other hand, in an irreducible representation, the variability domain of the pair \mathbf{p} , \mathbf{q} will be restricted to those pairs which can be obtained from a single pair \mathbf{p}_0 , \mathbf{q}_0 by a succession of the above transformations. Their general form is

$$(22) \quad \mathbf{p} = R\mathbf{p}_0, \quad \mathbf{q} = R\mathbf{q}_0 - bR\mathbf{p}_0,$$

with R an arbitrary rotation, b an arbitrary real number. The definition domain (22) corresponds to the definition domain of the four-dimensional

vectors \mathbf{p} in the case of the inhomogeneous Lorentz group, which contained all the vectors $\Lambda \mathbf{p}_0$ where Λ was a homogeneous Lorentz transformation.

Depending on the original pair of vectors $\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0$, there are four types of manifolds (22) which will give rise to four classes of representations. In class I, \mathbf{p}_0 and \mathbf{q}_0 are both finite and have different directions. In this case the manifold (22) can be defined by the equations

$$(22.I) \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{p}_0 = P^2; \quad |\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}| = |\mathbf{p}_0 \wedge \mathbf{q}_0| = S$$

and characterized by the positive P and S . This is the general and most important case.

In the second case, \mathbf{p} and \mathbf{q} are collinear. These manifolds can be characterized by a positive P

$$(22.II) \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = P^2.$$

In the third case

$$(22.III) \quad \mathbf{p} = 0, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = Q^2,$$

the manifold can be characterized by a positive Q . In the last case

$$(22.IV) \quad \mathbf{p} = 0, \quad \mathbf{q} = 0.$$

The result of the operations $O(R)$ and $\theta(b)$ can be now determined in the same way as the result of $d(\Lambda)$ was determined in reference 1. Only the result of this calculation will be given; it is different for the four different classes.

I. In class I the discrete variable ζ of (14), (15) can assume only one value and can be suppressed, therefore. One has

$$(23.I) \quad O(R)\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \psi(R^{-1}\mathbf{p}, R^{-1}\mathbf{q}),$$

$$(24.I) \quad \theta(b) \psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \psi(\mathbf{p}, \mathbf{q} - b\mathbf{p}).$$

One can convince oneself directly that the $O(R)$, $\theta(b)$ defined by these equations, together with the $T(\mathbf{a})$ and $G(\mathbf{v})$ given by (14), (15), form a representation of the Galilei group, i.e. that these operators satisfy the relations (1)-(10). For class I, the «little group» consists only of the identity and its representation is one dimensional. This causes ζ to assume only one value.

The representations of class I can be characterized by the two positive constants P, S and each such pair P, S defines a representation.

II. In this case the variables \mathbf{q} can be replaced by the single variable s by $\mathbf{q} = s\mathbf{p}$ and (15) can be replaced by

$$(15.II) \quad G(\mathbf{v})\psi(\mathbf{p}, s) = \exp [is\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}]\psi(\mathbf{p}, s).$$

ζ can again assume only one value and has been suppressed. For $\theta(b)\psi$ one has

$$(24.II) \quad \theta(b)\psi(\mathbf{p}, s) = \psi(\mathbf{p}, s - b),$$

which expresses the same relation as (24.I). In order to define $O(R)$ one has to select a permissible but otherwise arbitrary \mathbf{p}_0 and coordinate to every \mathbf{p} a rotation $r(\mathbf{p})$ so that

$$(25) \quad r(\mathbf{p})\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}.$$

Then

$$(25a) \quad P_\varphi = r(\mathbf{p})^{-1}Rr(R^{-1}\mathbf{p}),$$

leaves $\mathbf{p}_0 = P_\varphi\mathbf{p}_0$ invariant, i.e. is a rotation about \mathbf{p}_0 , its angle of rotation is denoted by φ . This is a function of R and \mathbf{p} . For $O(R)\psi$ one has

$$(23.II) \quad O(R)\psi(\mathbf{p}, s) = \exp [im\varphi(R, \mathbf{p})]\psi(R^{-1}\mathbf{p}, s),$$

where m is an arbitrary integer. The little group of this case is the group of rotations about \mathbf{p}_0 , its representations are one dimensional (as a result of which ζ can assume only one value); they can be characterized by the integer m . The representations of class II are characterized by the positive number P , and the integer m .

III. In the remaining two cases all states are invariant with respect to translations and this makes it evident that representations of the classes III and IV cannot correspond to equations which describe particles. These representations are actually only representations of smaller groups, viz. the factor group of the invariant subgroups formed by the $T(\mathbf{a})$ and the $T(\mathbf{a})G(\mathbf{v})$ respectively.

Since the variables \mathbf{p} are restricted to the value 0, they can be suppressed and one has, instead of (14)

$$(14.III) \quad T(\mathbf{a})\psi = \psi.$$

(15) remains valid in case III while (23.II) is replaced by

$$(23.III) \quad O(R)\psi(\mathbf{q}) = \exp [im\varphi]\psi(R^{-1}\mathbf{q}),$$

φ is again defined by (25), (25a), except that a \mathbf{q}_0 and \mathbf{q} replace \mathbf{p}_0 and \mathbf{p} . Instead of (24.II), one has

$$(24.III) \quad \theta(b)\psi(\mathbf{q}) = \exp[-i\epsilon b]\psi(\mathbf{q}).$$

ϵ being an arbitrary real number. The representations of class III are characterized by the real ϵ , positive Q and integer m . The little group consists in this case of the rotations about \mathbf{q}_0 and displacements in time; its representations are one dimensional which explains the absence of the variable ζ .

IV. In this case both \mathbf{p} and \mathbf{q} can be suppressed and all wave functions are invariant with respect to both $T(\mathbf{a})$ and $G(\mathbf{v})$. The little group consists of all operations. (R) and (b) and one has

$$(23.IV) \quad O(R)\psi(\zeta) = \sum_{\eta} D^{(l)}(R)_{\zeta\eta}\psi(\eta),$$

$$(24.IV) \quad \theta(b)\psi(\zeta) = \exp[-i\epsilon b]\psi(\zeta).$$

The representations are characterized by the real variable ϵ and the integer l , the total number of linearly independent wave function is $2l + 1$. The $D^{(l)}(R)$ are the representations of the ordinary three dimensional rotation group.

C. The Improper Galilei Group.

The operator I corresponding to inversion ($x' = -x$, $y' = -y$, $z' = -z$) can be found on the basis of the commutation relations

$$(26) \quad T(-\mathbf{a})I = IT(\mathbf{a}), \quad G(-\mathbf{v})I = IG(\mathbf{v});$$

its square will be 1 and it will commute with $\theta(R)$ and $\theta(b)$. These relations can be satisfied, in case of class I representations by

$$(27.I) \quad I\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \pm \psi(-\mathbf{p}, -\mathbf{q}).$$

The \pm defines a parity for these representations. For representations of class II, unless $m = 0$, the extension of the proper Galilei group to include the inversion unites the representations P, m and $P, -m$. If we denote the wave functions which belong to the former representation of the proper Galilei group by ψ_+ , those which belong to the latter representation of the proper Galilei group by ψ_- , the most natural definition of the inversion operator is

$$(27.II) \quad \begin{cases} I\psi_+(\mathbf{p}, s) = \psi_-(-\mathbf{p}, s) \\ I\psi_-(\mathbf{p}, s) = \psi_+(-\mathbf{p}, s) \end{cases}.$$

In the case of $m = 0$, the indices $+$, $-$ can be omitted; the representations P , O can be extended to representations of the Galilei group which includes the operation of inversion. In this case $I\psi(\mathbf{p}, s)$ can be either $\psi(-\mathbf{p}, s)$ or $-\psi(-\mathbf{p}, s)$ which again defines a parity for the P , O representations. Introducing a $-$ sign in (27.II) only gives another form to the same representation: the representations P , $m \neq 0$ have no parity. The reader will recognize the similarity with the extension of the two dimensional rotation group to the two dimensional rotation-reflection group.

The same situation prevails also with the representations of class III except that \mathbf{q} plays the role which \mathbf{p} played above. The representations of class IV also can be extended to include the operation of inversion and the extension again leads to a distinction of two types of representations, of even and odd parity.

The operation of time inversion θ will commute with $T(\mathbf{a})$ and $O(R)$ and

$$(28) \quad \theta(-b)\theta = \theta\theta(b), \quad G(-\mathbf{v})\theta = \theta G(\mathbf{v}).$$

We further postulate that θ involve complex conjugation K . These requirements can be most naturally satisfied, for class I representations, by

$$(29.I) \quad \theta\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = K\psi(-\mathbf{p}, \mathbf{q}) \equiv \psi(-\mathbf{p}, \mathbf{q})^*.$$

For the representations of class II one can set

$$(29.II) \quad \theta\psi_{\pm}(\mathbf{p}, s) = K\psi_{\pm}(-\mathbf{p}, -s).$$

The situation is again similar to that encountered when extending the representations of the two-dimensional rotation group to include time inversion and this applies also to class III. The representations of class IV are actually representations of the direct product of the three-dimensional rotation group with the group of time displacement. The effect of adjoining to this group the operation of time inversion has been discussed before in detail.

It should be remarked that the above discussion of the extension of the representations to include time inversion is not exhaustive. It deals only with the most simple and natural possibility. The results of the following sections are not affected by this incompleteness.

D. Definition of Scalar Product.

The wave functions of the first class depend on two vectors \mathbf{p}, \mathbf{q} whose variability domain is restricted by the conditions $\mathbf{p}^2 = P^2$, $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q} \leq S$. Hence we define the scalar product (ψ, φ) of two functions $\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, $\varphi(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ by the

integral,

$$(30.I) \quad (\psi, \varphi) = \int \psi^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \varphi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \delta(\mathbf{p}^2 - P^2) \delta(|\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}| - S) d\mathbf{p} d\mathbf{q}.$$

All our operators are unitary with respect to the scalar product (30). This is evident as far as the $T(\mathbf{a})$ and $G(\mathbf{v})$ of (14), (15) are concerned but remains valid also for $O(R)$ and $\theta(b)$ defined in (23.I) and (24.I). One can show this by the substitutions $\mathbf{p}' = R^{-1}\mathbf{p}$, $\mathbf{q}' = R^{-1}\mathbf{q}$ and $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$, $\mathbf{q}' = \mathbf{q} - b\mathbf{p}$ which, because of

$$R(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = R\mathbf{p} \wedge R\mathbf{q},$$

leave the δ functions of (30) unchanged. Similarly, for the representations of class II the unitary scalar product becomes

$$(30.II) \quad (\psi, \varphi) = \int \psi^*(\mathbf{p}, s) \varphi(\mathbf{p}, s) \delta(\mathbf{p}^2 - P) d\mathbf{p} ds.$$

2. - Physical Interpretation of the Representations of the Galilei Group.

Of the four classes of representations only the first two can have a straightforward physical interpretation because only in these the operation of displacement has an effect on the wave functions. As the first class is the more general of the two we shall discuss this one in detail limiting ourselves to brief remarks about the second.

A. Search for localized states.

If a representation is to describe in some sense the motion of a particle one will expect to find among its wave functions some describing states which represent, at a definite time, $t = 0$, a particle at a definite point of space, say at $x = y = z = 0$. Knowing these functions implies knowing all characteristic functions of the position operator and consequently the position operator itself. Both the non-relativistic Schrödinger equation and the various relativistic equations for particles with finite mass and arbitrary spin or zero mass and zero or one-half spin have localized states ⁽³⁾.

We shall require that the wave functions localized at $x = y = z = 0$ at $t = 0$ satisfy the following requirements:

(a) They must form a linear set S_0 ; i.e. the superposition of two such states must again be localized in the same manner.

⁽³⁾ T. D. NEWTON and E. P. WIGNER: *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 400 (1949).

(b) If ψ is localized, then $T(\mathbf{a})\psi$ must be orthogonal to all states of S_0 for $\mathbf{a} \neq 0$.

(c) The set S_0 must be invariant under rotations around the origin and reflections in space and time.

One can easily see that the postulate (c) is compatible with (b). Using the unitary nature of $O(R)$, one finds

$$(T(\mathbf{a})O(R)\psi, O(R)\varphi) = (O(R)^{-1}T(\mathbf{a})O(R)\psi, \varphi) = (T(R^{-1}\mathbf{a})\psi, \varphi) = 0,$$

so that $O(R)S_0$ satisfies postulate (b) if S_0 does. The same applies for space and time inversions. We shall see, however, that postulate (b) already leads to a contradiction.

For this purpose, let us write down (b) by means of (30.I) for a function ψ which belongs to S_0

$$(31) \quad \int \exp[i\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}] |\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q})|^2 \delta(\mathbf{p}^2 - P^2) \delta(|\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}| - S) d\mathbf{p} d\mathbf{q} = 0,$$

for $\mathbf{a} \neq 0$. We can average this equation with respect to \mathbf{a} over any domain which does not include $\mathbf{a} = 0$. In particular, averaging over a sphere of radius a gives

$$(31a) \quad \int \frac{\sin a|\mathbf{p}|}{a|\mathbf{p}|} |\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q})|^2 \delta(\mathbf{p}^2 - P^2) \delta(|\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}| - S) d\mathbf{p} d\mathbf{q} = \frac{\sin aP}{aP} = 0.$$

Because of the $\delta(\mathbf{p}^2 - P^2)$ factor, the $|\mathbf{p}|$ in the integrand of (31a) can be replaced by P and the corresponding factor brought outside the integral. The latter then becomes the normalization integral for ψ . Hence (31a) shows that the condition (31) cannot be satisfied. The same argument applies also to representations of class II.

Clearly, the $\delta(\mathbf{p}^2 - P^2)$ factor in the definitions (30) of the scalar product is responsible for this result. A linear manifold of functions in which $|\mathbf{p}|$ can assume all values does contain localized states. However, such a linear manifold is not irreducible.

Our equation (31a) shows that not even approximate localization is possible for an irreducible manifold. In fact the integral (31a) immediately gives the transition probability between an arbitrary wave function ψ and the linear combination of wave functions

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int T(a\mathbf{\Omega})\psi d\mathbf{\Omega}.$$

$\mathbf{\Omega}$ is a unit vector, $d\mathbf{\Omega}$ indicates integration over all directions.

If ψ is approximately localized at the origin, φ is a linear combination of wave functions which are approximately localized somewhere on a sphere of ra-

dus a . Furthermore, it is easy to see that the norm $(\varphi, \varphi) \leq 1$. Hence (31a) shows that the transition probability of ψ into a function φ which should be localized at a distance a from ψ is

$$|(\psi, \varphi)|^2 / (\varphi, \varphi) \geq \sin^2 aP / (aP)^2.$$

It decreases for large a at best as a^{-2} . This is the best that one can accomplish in approximate localization and if one chooses ψ accordingly the transition probability of ψ into all states of $T(\mathbf{a})S_0$ will be proportional to a^{-2} for large a . Since the volume of a thin spherical shell is $4\pi a^2 da$, it appears that a particle localized at O as well as possible is, with equal probabilities, in any spherical shell of unit thickness about O .

B. Search for States with Definite Velocity.

Again, we shall try to find a linear manifold V_0 of wave functions which represent states with zero velocity. We shall stipulate that if φ is such a state $G(\mathbf{v})\varphi$ be orthogonal to all states of V_0 if $\mathbf{v} \neq 0$ and further that V_0 shall be invariant under translations $T(\mathbf{a})$. It would be natural to postulate further that V_0 be invariant also under rotations, reflections, etc., but it will be impossible to meet even the requirements with respect to $G(\mathbf{v})$ and $T(\mathbf{a})$.

According to the above postulates $T(\mathbf{a})\varphi$ has zero velocity if φ has this property. Hence

$$(32) \quad (G(\mathbf{v})T(\mathbf{a})\varphi, \varphi) = 0,$$

for all \mathbf{a} and $\mathbf{v} \neq 0$. Writing out (32) again by means of (30.I)

$$\int \exp [i\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}] \exp [i\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}] |\varphi(\mathbf{p}, \mathbf{q})|^2 \delta(\mathbf{p}^2 - P^2) \delta(|\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}| - S) d\mathbf{p} d\mathbf{q} = 0,$$

for $\mathbf{v} \neq 0$. Since the $\exp [i\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}]$ form a complete set of functions of \mathbf{p}

$$(32a) \quad \int \exp [i\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}] |\varphi(\mathbf{p}, \mathbf{q})|^2 \delta(|\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}| - S) d\mathbf{q} = 0,$$

must hold for almost all $|\mathbf{p}| = P$. Let \mathbf{p}_0 be such a \mathbf{p} and let us decompose both $\mathbf{q} = \mathbf{r} + \alpha \mathbf{p}_0/P$ and $\mathbf{v} = \mathbf{s} + \beta \mathbf{p}_0/P$ perpendicular and parallel to \mathbf{p}_0 . The last equation then becomes

$$\int \exp [i\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} + i\alpha\beta] |\varphi(\mathbf{p}_0, \mathbf{q})|^2 \delta(P|\mathbf{r}| - S) d\mathbf{q} = 0.$$

This equation can be integrated over any domain which does not include $\mathbf{v} = 0$. Hence we multiply it with an arbitrary function $f(\beta)$ and integrate it over the cylinder $|\mathbf{s}| = v_0$. The integration over the angle which gives the direction of \mathbf{s} on the cylinder can be carried out and replaces the first factor of the integrand by $2\pi J_0(|\mathbf{r}|v_0)$ which can be replaced, on account of the δ function, by $2\pi J_0(Sv_0/P)$. As this does not vanish in general, we have

$$\int f(\beta) \exp [i\alpha\beta] |\varphi(\mathbf{p}_0, \mathbf{q})|^2 \delta(P|\mathbf{r}| - S) d\mathbf{q} d\beta = 0,$$

which, because of the arbitrariness of f , shows that

$$(32b) \quad \int |\varphi(\mathbf{p}_0, \mathbf{q})|^2 \delta(|\mathbf{p}_0 \wedge \mathbf{q}| - S) d\mathbf{q} = 0,$$

vanishes for almost all \mathbf{q} . This, however, entails the vanishing of the normalization integral (30.1) for φ . It follows that no states with zero velocity can be found among the states of the representations of class I. This result can be extended also to the representations of class II.

It may be of some interest to remark that states with definite velocity can be found if one does not require that the velocity be invariant with respect to displacements in space.

C. Other Attempts at Interpretation.

We have tried to define states for which at least one component of the velocity vanishes and found that this is the case for a φ which vanishes unless \mathbf{p} has the direction in which \mathbf{v} is to have zero component. From this, states for which the velocity has a prescribed component in a given direction can be easily found by (15). However, one finds that the totality of the states obtained in this way does not form a complete set of functions and no operator can be defined for the component of the velocity in a prescribed direction.

Conclusion.

We have not succeeded in giving a physical content to any of the irreducible representations of the inhomogeneous Galilei group. In particular, we were unable to describe states localized at one space point or states with a definite velocity. There exist some states with a definite velocity in only one direction, but since they do not form a complete set their field of application is very limited. The identification of the infinitesimal translation operator

of the Galilei group with the momentum operator leads to absurd results. Unless one should find a physical interpretation radically different from the one here attempted, one is forced to conclude that these representations are similar to those representations of the Lorentz group, the momentum vectors of which either vanish or are space-like. It appears surprising that merely by going over from the representations up to a factor to true representations one encounters such a radical change in interpretability.

RIASSUNTO

Mentre la transizione a un sistema di coordinate in movimento ($x \rightarrow x + vt$, $t \rightarrow t$) in meccanica classica commuta con gli spostamenti ($x \rightarrow x + a$, $t \rightarrow t$), le operazioni corrispondenti non commutano nella meccanica ondulatoria non relativistica di Schrödinger. Precisamente, le due operazioni prese in ordine differente differiscono di un fattore $\exp[i m \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} / \hbar]$. Il presente articolo considera la possibilità di una meccanica ondulatoria non relativistica in cui le trasformazioni delle funzioni d'onda obbediscano alle stesse relazioni di commutazione delle trasformazioni stesse. Si mostra che gli operatori di posizione e di quantità di moto possono esistere in tale meccanica solo se essa è riducibile, cioè solo se l'insieme di tutti gli stati può essere decomposto in sottogruppi che sono essi stessi invarianti rispetto a tutte le trasformazioni permesse della meccanica classica (rotazioni, spostamenti, trasformazioni proprie di Galileo).

Misure di conducibilità di elettroliti forti e deboli in alta frequenza.

A. CARRELLI e L. RESCIGNO

Istituto di Fisica dell'Università - Napoli

(ricevuto il 2 Giugno 1952)

Riassunto. — Si riportano i risultati di esperienze fatte su elettroliti forti e deboli, per quanto riguarda la loro conducibilità in alta frequenza. Per i primi viene confermato quanto già è stato riferito in precedenti lavori (*Nuovo Cimento*, 7, 9 (1950)); per i secondi si conclude che l'alta frequenza non apporta diversità alla conducibilità di essi misurata in bassa frequenza.

La misura della conducibilità di elettroliti forti e deboli in alta frequenza è stata oggetto di una serie di nostre ricerche. In una prima nota ⁽¹⁾ abbiamo riportato i dati sperimentali relativi a quattro sali tipo (KCl , Na_2SO_4 , KH_2PO_4 , K_4FeCn_6) scelti fra gli elettroliti, forti, di cui con un metodo di risonanza è stata misurata la conducibilità. Dall'indagine condotta abbiamo tratto che la conducibilità nell'alta frequenza adoperata ($\omega = 4,39 \cdot 10^7$ Hz) per gli elettroliti forti usati, al variare della concentrazione, ha un andamento diverso da quello che essa mostra in bassa frequenza. Tale diversità è stata interpretata come dipendente dall'azione che in alta frequenza ha la presenza di un raggio ionico diverso da zero, e sulla scorta dei dati già noti ⁽²⁾ si è posto in evidenza che un effetto opposto a quello che il raggio ionico produce sui valori della conducibilità, è dovuto all'associazione molecolare, soprattutto nel campo delle basse concentrazioni.

Il risultato importante messo in evidenza è il seguente: l'azione del raggio ionico e quella dell'associazione hanno importanza e conseguenze diverse l'una

⁽¹⁾ A. CARRELLI e L. RESCIGNO: *Nuovo Cimento*, 7, 9 (1950).

⁽²⁾ H. FALKENHAGEN: *Elektrolyte* (Hirzel Verlag, 1932).

dall'altra in alta frequenza; ma tanto l'azione del raggio ionico, che trova la sua origine nel processo di solvatazione, quanto quella dell'associazione, risentono dunque la presenza del campo rapidamente variabile.

In questa Nota riportiamo misure fatte, sempre col sistema della risonanza, relativamente alla conducibilità di solfati e nitrati (KNO_3 , NaNO_3 , K_2SO_4 ,

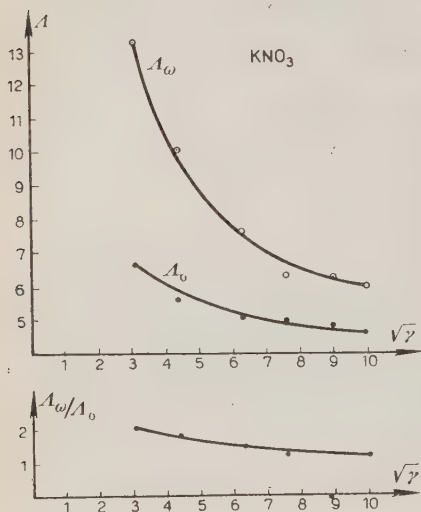


Fig. 1.

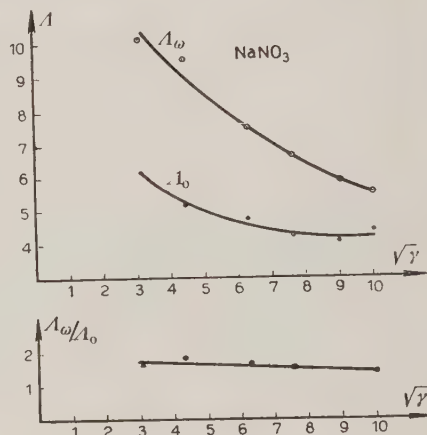


Fig. 2.

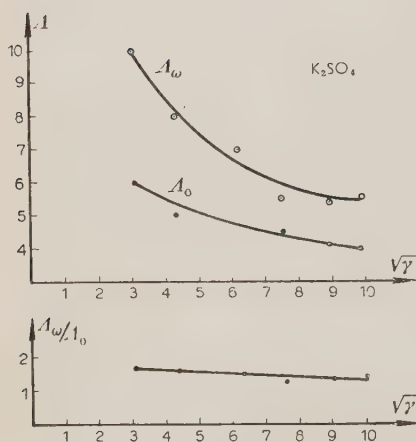


Fig. 3.

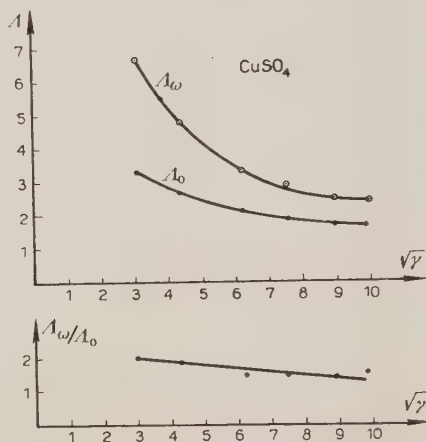


Fig. 4.

CuSO_4), per $\omega = 4,39 \cdot 10^7$ Hz. Si ritrova (fig. 1, 2, 3, 4) lo stesso andamento delle curve sperimentali ottenute per i quattro sali già citati e ciò autorizza ad estendere i risultati e le interpretazioni di tali risultati a tutti gli elettroliti forti (vedi fig. 3, 4, 5 della nota precedentemente richiamata).

Si è poi voluto ricercare quale fosse il comportamento in alta frequenza degli elettroliti deboli, per quel che riguarda la loro conducibilità. Abbiamo sperimentato con CH_3COOH ed NH_4OH . I valori della conducibilità in alta frequenza per gli elettroliti deboli presi in esame, a meno di

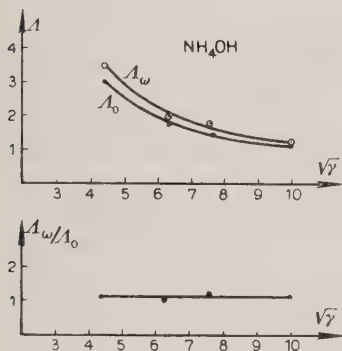


Fig. 6.

chè la frequenza d'urto nelle condizioni delle nostre esperienze, calcolata in base alla nota formula della teoria cinetica $Z = (4/3)\pi\sigma^2Nu$ (Z = numero d'urti, σ = raggio della molecola, u = velocità dell'ione, N = numero di molecole contenute in un cm^3), è dell'ordine di 10^9 Hz, mentre la tensione alternata usata ha una frequenza $\nu = 7 \cdot 10^6$ Hz, è possibile che esperienze ulteriori, condotte con frequenze di ordine maggiore di 10^9 Hz, possano mostrare una diversità fra le due conducibilità, chiarendo tale punto.

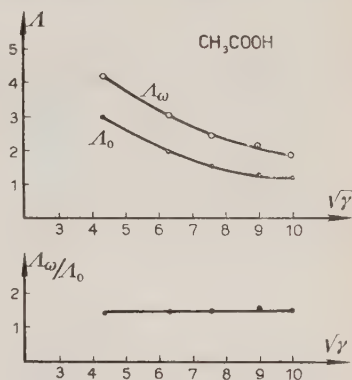


Fig. 5.

una costante, non sono diversi da quelli che si ottengono in bassa frequenza (fig. 5, 6). Molto probabilmente l'influenza dell'alta frequenza potrà essere notevole qualora il periodo della tensione alternata sia maggiore, e notevolmente maggiore del tempo che intercede fra due urti consecutivi relativamente ad uno stesso ione. Poi-

SUMMARY

The results of experiences made on strong and light electrolytes, as to their conductivity at high and low frequency, are related. As for the former the results are confirmed which have been related in a previous work (*Nuovo Cimento*, 7, 9 (1950)); as for the latter our measures prove that the high frequency does not produce any change to their conductivity measured at low frequency.

Sulla distribuzione zenitale della componente nucleonica di media energia.

P. BASSI e C. MANDUCHI

Istituto di Fisica dell'Università, Centro di studio degli Ioni veloci del C.N.R. - Padova

P. VERONESI

Istituto di Fisica dell'Università - Bologna

(ricevuto il 6 Giugno 1952)

Riassunto. — Si descrive una esperienza per la misura della dipendenza zenitale della componente nucleonica di media energia dei raggi cosmici, eseguita con camera di ionizzazione. Assumendo una distribuzione del tipo $\cos^n \theta$, risulta $n = 1,66 \pm 0,33$.

Riportiamo brevemente i risultati finora ottenuti in uno studio sistematico sul cammino di assorbimento e sulla dipendenza zenitale della componente nucleonica nell'atmosfera.

1. — L'esperienza, in questa prima indagine, è stata effettuata nel laboratorio della Marmolada (2000 m s.l.m.) usando una camera di ionizzazione rapida del tipo cilindrico, tarata con particelle α del Polonio: la zona utile della camera, lunga 40 cm, conteneva 2 litri di Argon a 5 atm; lo spessore delle pareti era di 0,15 cm di ottone.

Il dispositivo, con taglio corrispondente a $1,5\alpha$ (pari a 7,95 MeV), è in grado di segnalare diversi tipi di eventi: sciami di elettroni dell'aria, sciami di collisione o radiazione dei mesoni μ , interazioni nucleari. Il contributo degli sciami dell'aria è trascurabile, essendo la camera schermata in tutte le misure da almeno 13 cm di Pb (fig. 1); la frazione di eventi attribuibile agli sciami prodotti dai mesoni μ è stata dedotta col calcolo. Ogni altro contributo alle nostre misure risulta dovuto a eventi nucleari, prodotti nella interazione dei

raggi cosmici con la materia che costituisce lo schermo, il gas e le pareti della camera.

Le misure esistenti sul cammino di assorbimento λ_A e sulla dipendenza zenitale della componente nucleonica ⁽¹⁾, riguardano essenzialmente nucleoni di grande energia, capaci di generare sciami penetranti (componente A). Per questa componente i risultati sperimentali indicano un cammino di assorbimento in aria di $120 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$, e in piombo di $300 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$ circa. In accordo fra loro sono anche le misure sulla distribuzione zenitale a bassa quota: assumendo un assorbimento esponenziale, l'intensità della componente alla profondità x dell'atmosfera in ogni direzione risulterebbe $I = I_0 \exp [-x/\lambda_A \cos \vartheta]$ che, per piccoli angoli, si può approssimare con $I = I_0 \exp [-n] \cos^n \vartheta$ in cui $n = x/\lambda_A$: il valore di n trovato è intorno a 8.

Notizie più incerte si hanno sul cammino d'assorbimento e sulla dipendenza zenitale dei nucleoni di energia più bassa (componente B). Esperienze effettuate con lastre ⁽²⁾ indicano $\lambda_A = 300 \pm 20 \text{ g/cm}^2$, mentre misure effettuate con camere di ionizzazione ⁽³⁾ (per la sola componente ionizzante) danno $\lambda_A = 430 \pm 90 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$.

2. - Per ottenere indicazioni sull'andamento zenitale abbiamo confrontato le misure ottenute schermanto la camera con assorbitori che ricoprivano due diversi angoli solidi: in un caso (fig. 1 a) la camera era immediatamente sotto un parallelepipedo di piombo di 60 cm di spessore e $65 \times 57 \text{ cm}^2$ di base; nell'altro (fig. 1 b), era schermata con 13 cm di Pb e posta a 1 metro dalla base del parallelepipedo stesso. Riportiamo in tabella I i risultati sperimentali ottenuti.

Le misure venivano eseguite alternando giornalmente le posizioni a e b della camera: h sono i tempi di misura in ore, N i numeri totali di eventi.

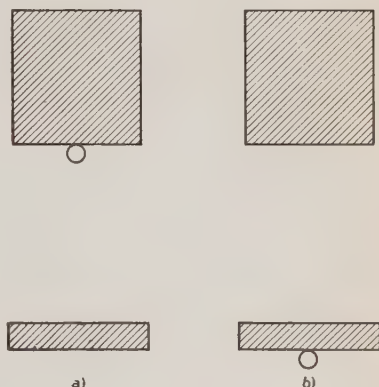


Fig. 1.

⁽¹⁾ G. ROCHESTER e W. V. G. ROSSER: *Reports on Progress in Physics* (London, 1951).

⁽²⁾ E. P. GEORGE e A. C. JASON: *Proc. Phys. Soc.*, **72**, 243 (1949); G. BERNARDINI, G. CORTINI e A. MANFREDINI: *Phys. Rev.*, **76**, 1792 (1949); H. BRIDGE e B. ROSSI: *Phys. Rev.*, **75**, 810 (1949); L. MALASPINA, M. MERLIN, O. PIERUCCI e A. ROSTAGNI: *Nuovo Cimento*, **7**, 145 (1950).

⁽³⁾ H. BRIDGE, B. ROSSI: *Phys. Rev.*, **75**, 810 (1949).

TABELLA I.

Posizione	h	N	N/h	$R[b/a]$
a	220,5	776	$3,52 \pm 0,13$	$1,64 \pm 0,08$
b	158,5	913	$5,76 \pm 0,19$	

Data l'alternanza delle misure, abbiamo ritenuto trascurabile l'influenza delle variazioni barometriche.

I risultati relativi alla dipendenza zenitale si ricavano confrontando l'assorbimento della componente nucleonica nei due diversi assorbitori di piombo di fig. 1 a) e b). Agli effetti del calcolo, abbiamo supposto, come per la componente penetrante, che l'assorbimento si possa considerare unidirezionale e rappresentabile grossolanamente con un esponenziale; abbiamo quindi assunto una dipendenza analitica dall'angolo zenitale del tipo $\cos^n \vartheta$. Questa scelta permette il confronto, per piccoli angoli, dei risultati ottenuti per le componenti delle varie energie. L'intensità relativa all'angolo solido $d\omega$ risulta allora

$$(1) \quad I_0 \cos^n \vartheta \exp [-l/\lambda_A] d\omega,$$

dove l è il percorso in Pb e λ_A il cammino di assorbimento in Pb: l'integrazione di (1) su $d\omega$, quando si

consideri la geometria degli assorbitori e della camera nelle due posizioni, fornisce valori il cui rapporto è direttamente confrontabile coi risultati dell'esperienza.

La laboriosa valutazione degli integrali ha fornito i risultati esposti in fig. 2: in ascissa è il cammino di assorbimento λ_A , in ordinata i rapporti R ; le tre curve sono relative ai valori $n = 1, 2, 3$ dell'esponente del coseno.

Per definire il valore di λ_A per la componente osservata, abbiamo eseguito misure di assorbimento

sotto 15 e 30 cm di piombo, ottenendo $\lambda_A = 400 \pm 100 \text{ g/cm}^2$: questo valore è in generico accordo con i risultati degli altri autori ($\lambda_A = 300 \pm 20 \text{ g/cm}^2$ ottenuto con le lastre e $\lambda_A = 430 \pm 90 \text{ g/cm}^2$ con ca-

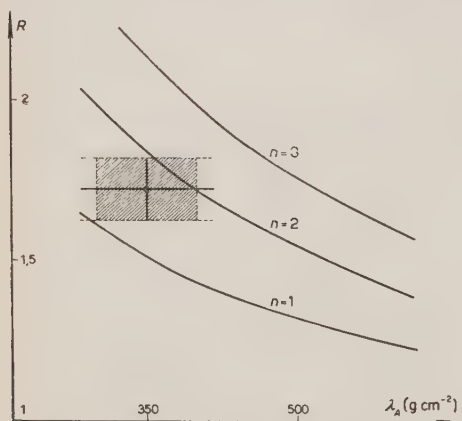


Fig. 2.

mera di ionizzazione per la sola componente ionizzante). Abbiamo usato il valore intermedio $\lambda_A = 350 \text{ g/cm}^2$. Dal confronto del rapporto R di tab. I (fra le frequenze nelle posizioni b e a) con le curve, risulta un valore di n compreso fra 1 e 2.

Per calcolare il contributo degli sciame prodotti da mesoni, abbiamo seguito un metodo analogo a quello di F. C. BROWN e J. C. STREET⁽⁴⁾: risultano al massimo 0,4 eventi all'ora in entrambe le geometrie. Il rapporto R viene lievemente corretto e diventa $1,72 \pm 0,10$: confrontando questo valore con la curva di fig. 2, si ottiene $n = 1,66 \pm 0,33$.

3. - Questo risultato si interpreta, per ora, qualitativamente, pensando che, dato il basso taglio della camera e la forma dello spettro della componente nucleonica, la maggior parte delle interazioni nucleari osservate sia dovuta a primari di energia non molto grande ($< 1 \text{ GeV}$).

Alle energie elevate (componente A), nella regione in cui si generano gli sciame penetranti l'assorbimento è direzionale, i secondari sono collimati e degradati in energia cosicchè la componente nucleonica si esaurisce in pochi urti: in questo caso è, praticamente, $n = x/\lambda_A$, cioè circa 8 al livello del mare (valore questo confermato dall'esperienza). Per energie molto basse (componente C) la dipendenza zenitale diventa insensibile e la componente nucleare si può ritenere approssimativamente isotropa. Il nostro risultato riguarda sostanzialmente la componente intermedia B , il cui assorbimento è graduale e ha luogo in molti attraversamenti nucleari con lievi perdite di energia in ogni urto⁽⁵⁾ e con scarsa correlazione angolare. Il percorso in aria delle particelle diventa perciò molto lungo e la dipendenza zenitale moderata: il valore $n=1,66$, da noi trovato, si adegua a tale schema.

4. - Vogliamo ringraziare il prof. A. ROSTAGNI e il prof. G. VALLE, direttori degli Istituti di Padova e Bologna, per l'interesse con cui hanno seguito l'esperienza, il prof. G. P. PUPPI per averci suggerito l'argomento e il dott. G. FACCHINI dei laboratori CISE per molti utili consigli.

(4) F. C. BROWN e J. C. STREET: *Phys. Rev.*, **84**, 1183 (1951).

(5) E. CLEMENTEL e G. PUPPI: *Nuovo Cimento*, **8**, 936 (1951).

SUMMARY (*)

Authors describe an experience undertaken in order to measure the zenithal dependence the middle energy nucleonic component of cosmic rays, using a ionization chamber. Assuming a distribution of the type $\cos^n \theta$, n results $= 1,66 \pm 0,33$.

(*) Editor's translation.

Eccitazione dei nuclei per assorbimento dei mesoni π^-

I. Considerazioni generali.

G. PUPPI, V. DE SABBATA e E. MANARESI

Istituto di Fisica dell'Università - Bologna

(ricevuto il 23 Giugno 1952)

Riassunto. — Viene studiata l'eccitazione di un nucleo $A=100$ a seguito dalla cattura di un π^- legato nell'orbita più profonda. Il modello impiegato implica l'assorbimento del π^- da parte di una coppia di nucleoni appartenenti ad un gas di Fermi a temperatura zero. Il processo viene diviso in due fasi: una prima praticamente istantanea che intercorre tra l'atto di assorbimento e il momento in cui le due valanghette provenienti dal punto dove è avvenuto l'assorbimento raggiungono la superficie del nucleo; una seconda fase in cui le particelle che non sono uscite istantaneamente riscaldano il nucleo che si diseccita per evaporazione. Due terzi dell'energia totale assorbita escono istantaneamente e circa un terzo (52 MeV) viene evaporato. L'energia visibile sotto forma di particelle ionizzanti è di circa 40 MeV. Il numero medio di neutroni è di $\sim 1,75$ e lo spettro molto ricco sulle energie molto basse (< 10 MeV). Il problema è stato risolto col metodo di Montecarlo. Ulteriori dettagli e il confronto coi risultati sperimentali sarà pubblicato prossimamente.

1. — Introduzione.

Ci proponiamo di discutere il problema della eccitazione di un nucleo medio pesante a seguito della cattura di un mesone π^- legato nell'orbita più profonda. (Più precisamente il nucleo in esame è con $A=100$ e $Z=43$, e corrisponde alla media dei nuclei pesanti delle lastre fotografiche). Poichè però questo problema ci offre la opportunità di riesaminare in generale il problema della eccitazione dei nuclei ad opera di particelle veloci, cominceremo con una discussione su questo argomento.

Nella cattura del mesone π^- legato, da parte del nucleo, possiamo ammettere, a cagione del corto raggio delle interazioni nucleari, che l'atto di assorbimento avvenga in un punto abbastanza ben definito del nucleo, ad opera di due o più nucleoni. L'assorbimento da parte di due nucleoni sembra ⁽¹⁾ essere il caso generale per l'assorbimento dei mesoni π^+ e π^- in volo, ma non vi è a priori alcuna ragione per ritenere che esso debba presentarsi anche nel caso dell'assorbimento dei π^- legati. Tuttavia noi suggeriremo questa ipotesi dapprima con un modello ben definito del nucleo, quello del gas di FERMI. Un modello ausiliario potrebbe consistere nell'assumere che l'atto iniziale di assorbimento sia effettuato da un raggruppamento α e la sua influenza verrà discussa in seguito. Osserviamo peraltro che i dati sperimentali attuali ⁽²⁾ non permettono una immediata definizione del modo di assorbimento. Riteniamo che l'esame completo dell'assorbimento da parte di una coppia di nucleoni, che svolgeremo ora, sia opportuno per metter luce nel problema. Supponiamo pertanto che sia semplicemente una coppia di nucleoni ad assorbire il mesone e a dividerne l'energia e il momento; il risultato netto dell'assorbimento consisterà nel fatto che da un certo punto nell'interno del nucleo partono due nucleoni veloci, all'incirca nella stessa direzione ma in verso opposto e ripartendosi l'energia totale del mesone assorbito. Rimandando al seguito la descrizione della effettiva modalità dell'assorbimento in conseguenza del moto proprio dei nucleoni, cerchiamo di fissare le caratteristiche del fenomeno.

2. - Modello.

Ricordiamo che GOLDBERGER ⁽³⁾ e BERNARDINI e Coll. ⁽⁴⁾ hanno trattato l'eccitazione di un nucleo pesante delle lastre, con il metodo di Montecarlo, nel caso in cui il nucleo venga eccitato da un nucleone veloce, proveniente dall'esterno e che lo attraversa cedendo appunto energia.

Il meccanismo di eccitazione di cui ci dobbiamo occupare noi (e che si ripete anche nel caso della eccitazione dei nuclei da parte di fotoni), contempla invece l'assorbimento di energia in un punto interno del nucleo, ed appare a prima vista molto differente dal caso citato dianzi.

⁽¹⁾ S. TAMOR: *Phys. Rev.*, **77**, 412 (1950); G. BERNARDINI e F. LEVY: *Phys. Rev.*, **84**, 610 (1951); K. BRUECKNER, R. SERBER e K. WATSON: *Phys. Rev.*, **84**, 258 (1951); H. BYFIELD, J. KESSLER e L. M. LEDERMAN: *Phys. Rev.*, **86**, 17 (1952).

⁽²⁾ D. PERKINS: *Phil. Mag.*, **41**, 583 (1950); M. G. K. MENON, H. MUIRHEAD e O. ROCHAT: *Phil. Mag.*, **41**, 583 (1950); J. HEIDMAN e L. LEPRINCE-RINGUET: *Compt. Rend.*, **226**, 1716 (1948); W. B. CHESTON e A. R. GOLDFARB: *Phys. Rev.*, **78**, 683 (1950); F. ADELMAN: *Phys. Rev.*, **85**, 249 (1952).

⁽³⁾ M. L. GOLDBERGER: *Phys. Rev.*, **74**, 1269 (1948).

⁽⁴⁾ G. BERNARDINI, E. T. BOOTH e S. J. LINDENBAUM: *Phys. Rev.*, **83**, 669 (1951); S. J. LINDENBAUM: *Thesis*, Columbia University.

In realtà il caso attuale risulta molto differente da quello considerato da GOLDBERGER e da BERNARDINI e Coll. solo se si ammette che il numero di nucleoni che partecipano al primo atto di assorbimento sia sufficientemente elevato, nei riguardi della energia da suddividere, in modo tale che, dopo l'assorbimento il guadagno in energia dei nucleoni che vi hanno partecipato sia piccolo; se solo due nucleoni vi partecipano, come abbiamo supposto che avvenga, in modo che il guadagno di energia sia notevole, i due casi hanno molti punti di similitudine.

Per discutere più a fondo, manca ancora un elemento e precisamente il modello del nucleo. Useremo il modello a gas di Fermi, che ha sempre fornito dei risultati in ragionevole accordo con la esperienza e perchè anche è un modello perfettamente definito e di facile impiego. In questo modello alle interazioni tra i singoli nucleoni, che sono in effetti responsabili della stabilità del nucleo, si sostituisce una buca di potenziale; e così al complesso di A nucleoni distribuiti nel volume del nucleo e interagenti tra di loro si sostituisce un gas di A particelle indipendenti, chiuse entro la suddetta buca di potenziale, che ha appunto le dimensioni del nucleo, ed altezza tale da sopravanzare l'energia del più elevato stato di traslazione occupato di 8 MeV, che rappresenta appunto la energia di legame dell'ultimo nucleone, in un nucleo pesante. Per il nucleo da noi considerato l'energia del più elevato stato di traslazione occupato risulta essere di 27 MeV, e pertanto la profondità della buca, che rappresenta le sole forze nucleari, sarà di 35 MeV; va da sé che per i protoni vi è in più la barriera coulombiana.

Se l'assorbimento del mesone avviene da parte di una coppia di nucleoni, l'energia di ciascuno, dopo l'assorbimento, nella materia nucleare è di circa 100 MeV, molto superiore quindi alla energia media di traslazione dei rimanenti nucleoni.

Il comportamento della materia nucleare al passaggio dei detti due nucleoni non è quindi sostanzialmente differente da quella che si avrebbe se un nucleone di 70 MeV attraversasse il nucleo provenendo dall'esterno.

Tenteremo pertanto di descrivere l'eccitazione del nucleo impiegando, per la prima fase il metodo di Montecarlo. Abbiamo deciso di impiegare questo metodo, come l'unico che possa fornire almeno dei risultati indicativi, pur rendendoci conto che la sua applicabilità è in linea di principio criticabile, quando le energie delle particelle non sono abbastanza elevate.

3. - Eccitazione istantanea.

L'applicazione del metodo di Montecarlo per la prima fase di eccitazione del nucleo ha i seguenti fondamenti. Ciascun nucleone supposto, coerentemente al modello, libero nella materia nucleare, conserva, nella interazione nucleone-

nucleone le stesse caratteristiche che possiede ove sia isolato; in altre parole l'urto tra due nucleoni nella materia nucleare si tratta come un problema di due corpi, e le sezioni d'urto che si debbono impiegare sono quelle valide per il caso dei due corpi.

La coesistenza dei vari nucleoni entro il nucleo interviene attraverso il principio di esclusione, che tiene conto dei livelli occupati dai rimanenti nucleoni, limitando così rispetto al caso dei due corpi il numero dei possibili stati finali. Questo significa che il considerare i nucleoni liberi entro il nucleo è solo una schematizzazione, ma in realtà gli A nucleoni formano un unico sistema fisico. Nelle ipotesi precedenti la interazione con la materia nucleare dei due nucleoni veloci originati dall'assorbimento del mesone, si riduce ad una successione di urti elementari contro i vari nucleoni incontrati lungo la traiettoria; e questa risulta abbastanza ben definita fino a che la lunghezza d'onda del nucleone veloce si mantiene molto piccola rispetto alle dimensioni nucleari.

Poichè la materia nucleare si trova nello stato fondamentale, cioè i nucleoni

incontrati occupano gli stati di traslazione più profondi, ad ogni urto, che avvenga con modalità permesse, il nucleone veloce cede sempre energia ai nucleoni incontrati. Si originano così dai due nucleoni primari due valanghette di nucleoni, di cui si segue il destino fino a che raggiungono la superficie del nucleo, ove in parte escono, in parte vengono riflessi. Pensiamo che a questo punto si possa ragionevolmente far cessare la prima fase (istantanea) del processo di eccitazione e diseccitazione del nucleo. Il fondamento per una tale affermazione è il seguente. Dal punto in cui hanno origine i primi due nucleoni veloci, sino

a che tutti i nucleoni componenti le due valanghette hanno raggiunto la superficie del nucleo, si assume che le proprietà della materia nucleare rimangano identiche a quelle iniziali, o in altre parole che la materia nucleare, mano

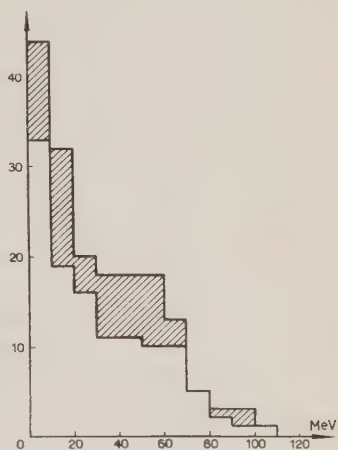


Fig. 1 a. - Spettro energetico dei neutroni di knock-on.

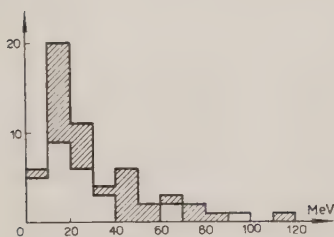


Fig. 1 b. - Spettro energetico dei protoni di knock-on. La parte tratteggiata si riferisce al contributo dovuto alla cattura da parte di una coppia $P-P$.

a mano incontrata, non sia stata ancora informata delle modificazioni subite da alcuni suoi componenti. È allora, in particolare, indifferente l'ordine con

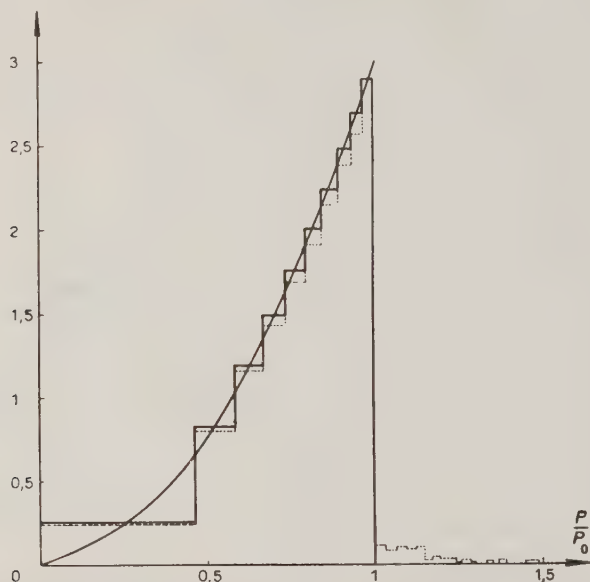


Fig. 2. - Distribuzione degli impulsi nel nucleo. Il tratto pieno rappresenta la distribuzione iniziale, il tratto punteggiato la distribuzione che si presenta all'inizio della evaporazione.

cui si trattano le varie collisioni dei due nucleoni veloci primari e dei loro secondari. Nella scala del tempo ciò equivale ancora a dire che la propagazione delle valanghette fino alla periferia del nucleo si può considerare istantanea. In realtà ogni nucleone che entra a far parte delle valanghette dovrebbe essere tolto dalla configurazione della materia nucleare incontrata dalle valanghette stesse, ma in un nucleo sufficientemente pesante l'errore che si commette non può influire sensibilmente sui risultati.

Giunti alla superficie del nucleo, come abbiamo detto, i nucleoni componenti le due valanghette si dividono in due gruppi: un gruppo esce, ed un secondo gruppo viene riflesso. I componenti di questo secondo gruppo, data la dipendenza dall'energia dei coefficienti di riflessione della superficie del nucleo, sono prevalentemente di energia non molto al disopra della energia massima della sfera di Fermi.

Continuare a seguirli entro il nucleo, ignorando le modificazioni avvenute nella materia nucleare, e soprattutto trascurando l'ordine dei fenomeni nel

tempo, non avrebbe più significato, anzi sarebbe decisamente errato; seguirli al modo anzidetto, d'altra parte, significherebbe entrare nei dettagli del processo di distribuzione della energia di eccitazione sui diversi nucleoni, cioè in un tipico problema di più corpi, non solubile per via diretta. L'unica cosa da fare è, come detto dianzi, troncare l'analisi della prima fase istantanea del processo di eccitazione al momento in cui tutti i componenti delle due valanghette raggiungono la superficie del nucleo. Si ha così, alla fine di questa

prima fase, un gruppo di particelle emesse, che chiameremo anche noi, in accordo con la terminologia corrente, nucleoni di knock-on, rappresentati in fig 1 *a, b* ed un nucleo residuo, il quale inizierà una seconda fase di diseccitazione che, sempre in accordo con la terminologia corrente, chiameremo fase di evaporazione. Il gruppo di particelle riflesse più le particelle nucleari non interessate nella prima fase del processo hanno una distribuzione energetica media quale è rap-

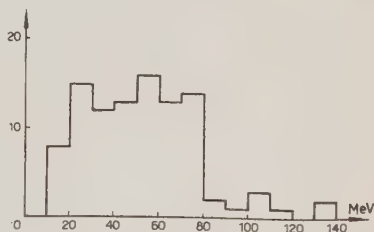


Fig. 3. - Distribuzione dell'energia residua.

presentata in fig. 2. Questa configurazione, che differisce dalla configurazione iniziale del gas di Fermi allo zero assoluto, e per i vuoti al disotto della energia massima di Fermi e per il gruppo di particelle più energiche, oltre il detto limite, rappresenta la condizione iniziale per il cosiddetto processo evaporativo. Da notare che la energia (fig. 3) che rimane a disposizione del processo evaporativo è in media soltanto un terzo della energia totale assorbita; due terzi della detta energia escono quindi istantaneamente.

4. - Evaporazione.

Resta ora da discutere il problema della evaporazione della energia residua E . Le considerazioni che svolgeremo ci sembrano abbastanza generali, ma non ci nascondiamo che possano in realtà dipendere, in modo forse più sensibile di quanto non appaia, dal particolare modello nucleare impiegato.

Generalmente, nella trattazione della evaporazione ⁽⁵⁾ si segue un modello termodinamico, cioè si suppone che il sistema eccitato emetta particelle il cui spettro energetico riflette la distribuzione energetica di un gas caldo, supposto che il detto gas abbia raggiunto una condizione di equilibrio. In altre parole la distribuzione energetica delle particelle evaporate dipende dalla di-

⁽⁵⁾ J. M. BLATT e V. F. WEISSKOPF: *MIT. Techn. Repo.*, **42** (1950).

sistribuzione energetica caratteristica di un gas di Fermi a temperatura diversa da zero. Più in generale la distribuzione energetica può esprimersi nella forma

$$I(\varepsilon) d\varepsilon \propto \varepsilon \sigma_c(\varepsilon) \omega(E - \varepsilon - B) d\varepsilon,$$

dove $\sigma_c(\varepsilon)$ è la sezione d'urto per la reazione a ritroso (cattura della particella di energia ε da parte del nucleo $(A - I)$ con formazione del nucleo A), ω rappresenta la densità di livelli energetici del nucleo di arrivo per intervallo unitario di energia e B l'energia di legame della particella evaporata. In questa formula, che è pur la più generale, ogni stato finale interviene esclusivamente col suo peso statistico e questo significa che il nucleo può concentrare su una particella una qualunque frazione della sua energia, senza tener conto se questo si possa in effetti realizzare. Ci sembra che una situazione come quella descritta si possa realizzare solo supponendo che all'istante iniziale, nel momento cioè in cui ha inizio il processo vero e proprio di evaporazione, la superficie del nucleo diventi impenetrabile, in modo tale da permettere che in seno al gas caldo si realizzi una qualunque distribuzione di energia tra le particelle, altrimenti, stante le dimensioni finite del nucleo, e il limitato coefficiente di riflessione della superficie, durante il processo stesso di raggiungimento dell'equilibrio, e in modo dipendente dalle condizioni iniziali, il sistema perde continuamente particelle; in altre parole il processo di raggiungimento dell'equilibrio non si può separare da quello di diseccitazione e quindi in definitiva neppure quest'ultimo dalle condizioni iniziali. Tuttavia per i nostri scopi impiegheremo la formola citata nella previsione dello spettro delle particelle evaporate, anche in vista della modesta energia globale di evaporazione, e terremo conto della graduale diseccitazione con un nuovo Montecarlo.

5. - Conclusioni.

Dai dati riportati si possono ricavare varie conclusioni.

1) Circa i due terzi della energia totale assorbita escono immediatamente dal nucleo sotto forma di neutroni (1,75 per cattura) e protoni (0,56 per cattura). In conseguenza della barriera coulombiana lo spettro dei protoni è più energetico di quello dei neutroni. Lo spettro dei protoni non è però così ricco di particelle di alta energia, come si potrebbe pensare in base all'effetto della distribuzione dei momenti entro il nucleo; comunque esso è una funzione sensibile del numero di cattura da parte di coppie $P-P$ (che nel nostro computo è stato scelto in base al puro fattore statistico). Se ci si limita al caso delle catture da parte delle sole coppie $P-N$ (caso non molto dissimile come risultati globali da quello dell'assorbimento da deutoni) il numero di protoni veloci

(> 30 MeV) si riduce per un fattore ~ 2 . Questo punto verrà deciso nel confronto con i dati sperimentali.

2) L'energia residua di eccitazione ha un valore medio intorno a 52 MeV, ma una distribuzione assai larga, almeno fino a 80 MeV. Pochi i casi di energia residua di eccitazione superiore a 80 MeV.

3) Tenuto conto delle particelle evaporate, il numero medio di neutroni per cattura risulta essere di circa 5, e non molto sensibile al rapporto tra il numero delle catture da coppie $P-N$ e il numero delle catture da coppie $P-P$, e formato di circa 2 neutroni espulsi immediatamente e 3 neutroni evaporati. Questo numero è in accordo ragionevole col risultato di V. T. COCCONI (*) per la cattura in Sn. Anche lo spettro energetico dei neutroni è abbastanza ripido da accordarsi coi risultati citati.

4) L'energia media visibile per stella è ~ 40 MeV, e pertanto l'energia globale che si stimerebbe in base ai soli rami ionizzanti è di 100 MeV. Altri particolari verranno ampiamente discussi in un lavoro successivo.

Nell'intraprendere questi lavori ci è stato di grande aiuto l'incitamento e il consiglio del prof. G. BERNARDINI, che ringraziamo sentitamente.

(*) V. T. COCCONI (comunicazione privata).

SUMMARY (*)

The Authors investigate the excitation of a nucleus $A = 100$ due to the capture of a π^- bound on the lowest-orbit. The model used implies the absorption of the π^- by a pair of nucleons of a Fermi gas at zero temperature. The process is divided in two phases: a first one, practically instantaneous, which takes place between the absorption act and the instant in which the two little avalanches originating from the point in which the absorption took place reach at the nucleus surface; a second one in which the particles which were not instantaneously released heaten the nucleus which becomes disexcited through an evaporation process. Two thirds of the total energy absorbed are instantaneously released and about one third (52 MeV) is evaporated. The energy becoming visible in form of ionizing particles is of about 40 MeV. The mean number of neutrons is $\sim 1,75$ and the spectrum is very rich at the very low energies (< 10 MeV). The problem has been solved using the Montecarlo method. Further details and a comparison with experimental results will be published in a forthcoming paper.

(*) Editor's translation.

LETTERE ALLA REDAZIONE

(La responsabilità scientifica degli scritti inseriti in questa rubrica è completamente lasciata dalla Direzione del periodico ai singoli autori)

Aumento dell'intensità dei raggi cosmici al livello del mare durante tempeste di sabbia.

M. ABD EL-WAHAB, L. ALLEGRETTI, M. G. EL-FANDI e M. EL-SHERBINI

Physics Department, Faculty of Science, Farouk I University - Alexandria (Egitto)

(ricevuto l'11 Luglio 1952)

In primavera, in Egitto, quando si producono particolari condizioni meteorologiche per cui vengono a spirare venti da Sud, o SSE, o SSW con velocità dell'ordine di 50-60 chilometri/ora la sabbia del deserto è sollevata ed una « nube » di minutissime particelle di diametro variabile tra i 0,2 micron ed i 100 micron, ma con un'altissima prevalenza di particelle di diametro compreso tra i 2 ed i 5 micron, invade l'atmosfera e raggiunge in poche ore altezze anche di 500 o di 1000 metri.

Così il cielo di Alessandria d'Egitto quattro o cinque volte all'anno è coperto da questa nube che si stende come un più o meno fitto nebbione sulla città e procede verso il mare, finchè sette o otto ore più tardi, qualche volta fino a dieci ore, freschi e violenti venti dal Nord spazzano la nube e respingono la sabbia verso il Sud.

Tali fenomeni sono chiamati in arabo « haboobs » o « khamsin » perchè il periodo di tempo durante il quale si producono è di circa cinquanta giorni. In questa primavera tali tempeste di sabbia si sono verificate il 14 ed il 20 Marzo, il 17, il 18 ed il 26 Aprile.

In tale periodo di tempo era in funzione nell'Istituto di Fisica della Facoltà

di Scienze dell'Università Farouk un telescopio di quattro contatori di Geiger-Müller (cm 4×60) (distanza tra i contatori estremi cm 90) col quale si eseguivano misure di assorbimento in piombo.

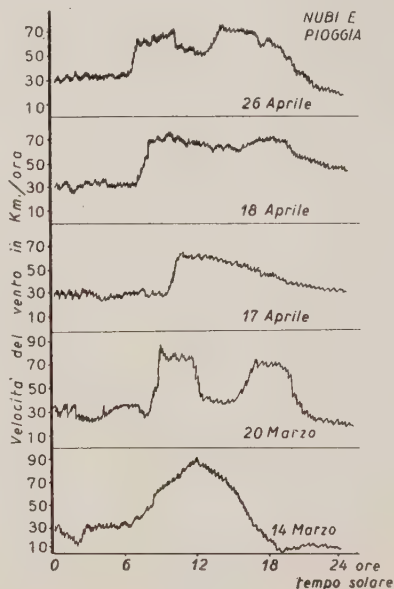


Fig. 1.

Ora, durante le tempeste di sabbia, si osservarono notevoli variazioni nell'intensità dei raggi cosmici (aumento fino al 50 per cento) sia per la componente totale che per quella dura, variazioni che sono rappresentate nei grafici della fig. 1.

La fig. 2 riporta invece, per gli stessi giorni, la registrazione grafica della velocità del vento (direzione da Sud-Ovest, vento del Deserto) con la quale velocità è direttamente connessa la formazione della nube di sabbia.

La corrispondenza tra i due fenomeni è evidente; pressione e temperatura, almeno al livello del mare, per gli stessi periodi di tempo si mantennero praticamente costanti (variazioni massime $\Delta t^{\circ} \cong 2^{\circ}\text{C}$, $\Delta P \cong 5 \text{ mm Hg}$).

E che la formazione della nube di sabbia nell'atmosfera sia direttamente responsabile del fenomeno osservato lo confermano, a nostro avviso, i risultati del giorno 26 Aprile. In tal giorno lo « khamzin » non produsse l'aumento nell'intensità della radiazione cosmica perchè la caratteristica nube di sabbia non si formò. Era infatti nella notte piovuto anche sul Deserto ed il cielo restò tutto il giorno coperto da nuvole basse (Cb-cirro cumuli) ad una altezza dai duecento ai trecento metri, cosicchè la sabbia non poteva certo sollevarsi oltre questa quota; in tale ordine di idee si potrebbe anche interpretare la lieve diminuzione di intensità che seguì un violento acquazzone

che cadde verso il mezzogiorno e che deterse l'atmosfera.

Si è ritenuto opportuno dare notizia

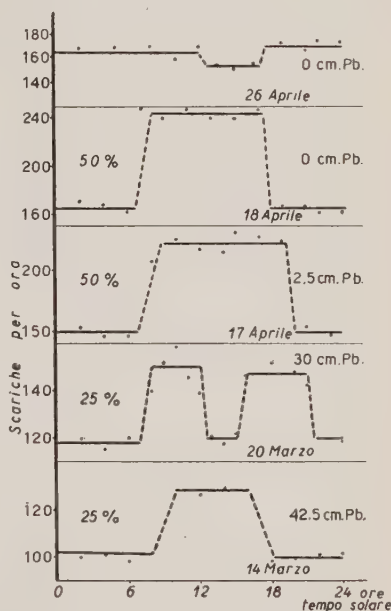


Fig. 2.

di tali osservazioni, che ci ripromettiamo di estendere e completare con maggior larghezza di mezzi il prossimo anno, per l'evidente interesse che possono presentare anche dal punto di vista meteorologico.

LIBRI RICEVUTI E RECENSIONI

Epistolario di Alessandro Volta - Edizione Nazionale; vol. I di XXVIII + 517 p., Nicola Zanichelli, Bologna, 1949; vol. II di XXIV + 568 p., Nicola Zanichelli, Bologna, 1951.

Sotto gli auspici dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e della Società Italiana di Fisica si sta pubblicando in Edizione Nazionale per i tipi della Casa Zanichelli di Bologna, l'Epistolario di VOLTA. Dei cinque volumi previsti, sono usciti finora i due primi, comprendenti più che 800 lettere oltre a numerose appendici. I due volumi in-4° grande, in bellissima veste tipografica e arricchiti da moltissime tavole illustrate fuori testo, sono stati curati dalla Commissione Nazionale Voltiana e ordinati e compilati per essa dal prof. FRANCESCO MASSARDI.

Libri di questo genere sono di solito destinati a rimanere per decenni nei più polverosi scaffali della biblioteca, da cui forse una volta accadrà che un anziano professore lontano ormai dalla ricerca li tragga, per una commemorazione o per una noticina erudita. Chi scrive non nasconde di essersi accinto al compito della recensione come ad un penoso dovere, ad un lavoro sicuramente inutile, traducendosi solo in una perdita di tempo notevole. Ma sin dalle prime lettere gli si è venuta delineando, in un mondo che non conosceva, straordinariamente vivo e moderno, la figura di un uomo inquieto nel suo amore sincero e profondo per la natura e insieme sereno e forte lottatore al di sopra della mischia comune, dal temperamento logico e appassionato ad un tempo, dalla mente fertile d'idee e

disciplinata dalla volontà di comprendere, di rendere completamente chiara ogni cosa: i segni inconfondibili di una umanità riccamente dotata. E quelle pagine, che aveva in animo di scorrere il più rapidamente possibile, sono invece state da lui lette con attenzione, con interesse sempre crescente.

Dal carteggio iniziale con quel padre Bonesi gesuita, che voleva persuadere il VOLTA sedicenne a entrare nella Compagnia di Gesù, al memoriale in cui il trentenne Reggente delle scuole di Como espone al Conte di Firmian le sue idee sull'insegnamento; dalla incessante richiesta di mezzi e apparecchi per il suo laboratorio di fisica, alle innumerevoli lettere di viaggio spedite da ogni parte d'Europa al fratello Luigi,... da tutte queste lettere di argomento vario, l'entusiasmo e l'umanità del VOLTA risaltano assai più vivamente che non dalle sue memorie strettamente scientifiche.

Che dire dell'avventura del mercurio, di quel mercurio che gli era necessario per vedere col suo eudiometro che cosa risultasse dalla combustione dell'aria infiammabile con l'aria deflogisticata, quel mercurio che invoca in tante lettere e la cui posta era la sintesi dell'acqua?

E della commozione che traspare nella descrizione di spettacoli naturali, quali quella, letterariamente così efficace, di rupi scoscese ed acque precipitanti, di massicci montuosi logorati dal tempo sulla via del Gottardo?

E di quel piccolo gioiello che è la lettera all'incognita « Marchesina amabile », in cui il VOLTA quarantenne, con spigliatezza garbata non scevra da una punta

di rimpianto, di umana malinconia, spiega alla fanciulla le sensate ragioni che consigliano loro di non coltivare la nascente simpatia reciproca?...

L'avventura della vita, goduta e sofferta con dignità e compostezza, sotto la spinta di una inesauribile energia diretta da una sicura facoltà di distinguere le cose veramente importanti: e una capacità di meravigliarsi, un entusiasmo giovanile intramontabili, sorretti da un carattere duro che non concepisce deviazioni dalla via prefissasi. Ecco l'Epistolario di VOLTA e VOLTA uomo nelle sue lettere.

Debbo aggiungere un incitamento a leggere questi volumi? Li leggerà chi sente il bisogno di un esempio e di una guida, chi va cercando un Maestro. Si presenta solo il dubbio se, nella nostra

lotta per il tempo, noi non stiamo facendo per caso un conto completamente sbagliato. Se nel troncar via, assieme a tante altre cose, la storia della ricerca come avventura umana, non avverrà che quella figura del ricercatore tecnico, che stiamo sostituendo a quella del naturalista scienziato, non sarà in definitiva la figura di un impiegato; se le mezze maniche e l'orario d'ufficio non finiranno con l'entrare quali elementi essenziali nei nostri laboratori; se molti dei nostri ragazzi, privi come sono di esempi, nonchè non farsi guidare da amore per la natura, non continueranno, solo perchè presi nel giro d'un meccanismo che impedisce loro di confessare apertamente a se stessi che il loro lavoro li interessa ben poco.

M. AGENO

La REVUE d'OPTIQUE comunica di star preparando la pubblicazione integrale delle comunicazioni fatte al Colloque de Science Photographique tradotte in lingua francese.

Gli interessati potranno prenotare la pubblicazione entro il 1° Settembre presso l'Editore, al prezzo di sottoscrizione di frs. 5 000 più frs. 300 per spese postali.

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA

Direttore responsabile: G. POLVANI

Tipografia Compositori - Bologna

Questo fascicolo è stato licenziato dai torchi il 23-VII-1951

